令 和 5 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
複雑系科学専攻
入学試験問題（専門）

令和４年８月８日

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

４．日本語または英語で解答すること。

５．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認すること。

６．問題は数１、数２、物１、物２、物３、化１、化２、化３、化４、化５、生１、生２、生３、地１、地２、情１、情２、情３、工１、工２、工３の２１科目がある。このうち３科目を選択して解答すること。なお，選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。

７．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

８．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

９．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出すること。

１０．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

数1

実数の2次正方行列 A, A の転置行列 $A^\top$, 単位行列 I をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\qquad A^\top=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書く。$A^\top A=I$ となるとき，A を直交行列という。2次元実数ベクトル $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{h}$ と2次の直交行列 A と正の実数 λ に対して

$$\boldsymbol{r}'=\lambda A\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}$$

の成分表示を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

と書き，これで定まる $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}'$ への写像を相似変換と呼ぶ。とくに $\lambda=1$ の場合，合同変換と呼ぶ。以下の問に答えよ。

[1] 任意の2次直交行列 A は，$-1\leq a\leq 1$ の範囲の実数 a によって定められる行列

(ア) $\begin{pmatrix} a & \mp\sqrt{1-a^2} \\ \pm\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{1-a^2} \\ \pm\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$

（一つの行列の中の複合は同順）に限られることを証明せよ。つまり，$A^\top A=I$ を満たす2次正方行列 A は必ず(ア)に表示された行列のどれかに等しいことを証明せよ。

[2] 以下のような6つのベクトルが与えられたとき，$\boldsymbol{r}_i$ を $\boldsymbol{r}'_i$ に $(i=0,1,2)$ 移す相似変換の成分表示を求めよ。また，その相似変換の式の中の係数 λ の値を示せ。

$$\boldsymbol{r}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}'_0=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}'_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}'_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

[3] ℓ,m,ℓ',m' は正の実数とする。次の方程式(a), (b)で表される平面上の図形をそれぞれ F_a, F_b と呼ぶことにする。以下の問に答えよ。

$$\text{(a)}\ \frac{x^2}{\ell^2}+\frac{y^2}{m^2}=1,\qquad \text{(b)}\ \frac{x'^2}{\ell'^2}+\frac{y'^2}{m'^2}=1$$

1) (x,y) を直交座標とする平面に図形 F_a を描け。

2) 図形 F_a を図形 F_b に移す相似変換が存在するための必要十分条件を ℓ,m,ℓ',m' に関する数式で表せ。$\ell>m$, $\ell=m$, $\ell<m$, $\ell'>m'$, $\ell'=m'$, $\ell'<m'$ の場合があることに注意せよ。

3) 図形 F_a を図形 F_b に移す相似変換が存在するとき，そのような相似変換をすべて成分表示で示せ。図形を移す相似変換は一つとは限らないことに注意せよ。

（数1の問題は次のページに続く）

（数１の問題の続き）

[4] 次の方程式 (c) で表される図形 F_{c} を方程式 (d) で表される図形 F_{d} に移す相似変換があれば，そのすべてを成分表示で示せ。そのような相似変換がなければ，「ない」と答えて，ないことを証明せよ。

$$(\mathrm{c})\ y = x^2, \qquad (\mathrm{d})\ y' = \frac{1}{4}x'^2$$

（数１の問題はここで終わり）

数２

以下の各問に答えよ。ただし，$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，$y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ とする。

[1] 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

1）$y'' + 4y' + 4y = 0$

2）$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$

[2] 以下の各問に答えよ。

1）$y' = f(y/x)$ の形の微分方程式は，$v = y/x$ と変数変換することにより，変数分離形に帰着できることを示せ。

2）微分方程式 $y' = (x-y)/(x+y)$ を解け。

[3] 以下の２次元非線形力学系について考える。

$$\text{(a)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y - x(x^2 + y^2)$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + x - y(x^2 + y^2)$$

1）連立微分方程式 (a)(b) の不動点を求めよ。さらにその不動点におけるヤコビ行列の固有値を求め，不動点の安定性を調べ，不動点近傍での軌道の概略を図示せよ。

2）極座標 $x(t) = r(t)\cos\theta(t), y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ に変換して，$r(t)$ と $\theta(t)$ の微分方程式を導け。

3）$r(t)$ および $\theta(t)$ の初期値をそれぞれ $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0$ として，2) で導いた $r(t)$ と $\theta(t)$ の微分方程式の解を求めよ。

4）$t \to \infty$ での $r(t)$ の極限値を求め，８個の初期値 $(r_0, \theta_0) = (2^i, n\pi/2)(i = \pm 1,$ $n = 0, 1, 2, 3)$ からの $t \geq 0$ における軌道の概略を図示せよ。

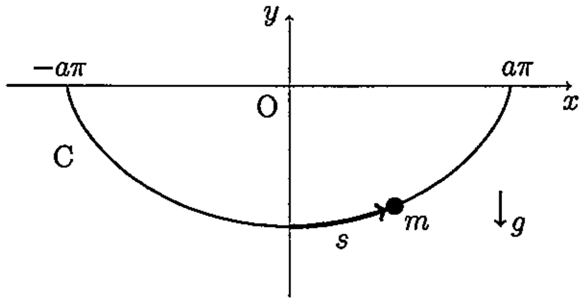
5）不動点を除く任意の初期値からの解が $t \to \infty$ で漸近する軌道の式を求めよ。このような軌道は一般に何と呼ばれているか，その名称を答えよ。

物1

θ を媒介変数として

$$x = a(\theta + \sin\theta),\ y = -a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0, -\pi \le \theta \le \pi)$$

で表される曲線C（サイクロイド，下図参照）に拘束されて，質量 m の質点が滑らかに運動している。鉛直下向きの重力加速度を g として，以下の問に答えよ。



[1] θ を時間 t の関数 $\theta(t)$ とし，$\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ として，質点の運動エネルギー $T(\theta, \dot{\theta})$ を求めよ。

[2] 質点のポテンシャルエネルギー $U(\theta)$ を求めよ。ただし，$y = 0$ のとき $U = 0$ とする。

[3] 質点の運動に関するラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta})$ を求めよ。

[4] 質点が曲線Cの最下点 $(\theta = 0)$ から，θ の位置まで曲線に沿って進んだ長さ s を

$$s = \int_0^{\theta} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta'}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta'$$

と定める。この積分を計算し，s を θ を用いて表せ。

[5] s を時間 t の関数 $s(t)$ とし，$\dot{s} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ として，ラグランジアン $L(s, \dot{s})$ を求めよ。

[6] 質点の運動に関して s についての運動方程式を導け。

[7] s の一般解を求めよ。

[8] $\theta = \theta_0\ (0 < \theta_0 \le \pi)$ から初速度0で運動を始めた質点の運動の周期は，θ_0 によらず一定であることを説明せよ。

次に，質点が速さに比例する大きさの抵抗を受けながら運動する場合について考えよう。なお，抵抗の比例定数を $k > 0$ とする。

[9] 質点の運動に関して s についての運動方程式を書け。

[10] $\kappa = \dfrac{k}{2m}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{4a}}$ とし，$\omega > \kappa$ のときの，s の一般解を求めよ。

[11] $\theta = \theta_0\ (0 < \theta_0 \le \pi)$ から初速度0で運動を始めた質点が，曲線Cの最下点を同じ運動の向きで通過する時間間隔は，θ_0 によらず一定であることを説明せよ。

物2

以下の各問に答えよ。ただし，ε_0 は真空の誘電率とする。

[1] ある曲線上に線密度 λ で正電荷が分布しているとする。線上を除く空間中の点Pと線上の線要素 $\mathrm{d}s$ との距離を r とすると，電荷による点Pでの静電ポテンシャルは

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda \mathrm{ds}}{r}$$

で与えられる。ただし，積分は曲線に沿った線積分である。このことを用いて，以下の各問に答えよ。

1) 図1のように半径 a の円周上に線密度 λ で一様に正電荷が分布しているとき，中心軸上，中心Oから $x(>0)$ の距離の点Pでの静電ポテンシャル $\phi_1(x)$ を求めよ。ただし，無限遠 $x\to\infty$ で $\phi_1\to 0$ とする。さらにその点Pでの電場の強さ $E_1(x)$ を求めよ。

2) 半径 a の円板に面密度 σ で正電荷が一様に分布しているとき，円板の中心軸上中心から x の距離の点での静電ポテンシャル $\phi_2(x)$ と電場の強さ $E_2(x)$ を求めよ。さらに，電場の強さを図1の θ の関数として表せ。

3) 一様な面密度で帯電している無限平面板から ℓ の距離にある点Qに生じる電場の強さを E_{31} とし，点Qから 2ℓ の距離以内にある板上の電荷による電場の強さを E_{32} とすると，$E_{32}=E_{31}/2$ であることを示せ。

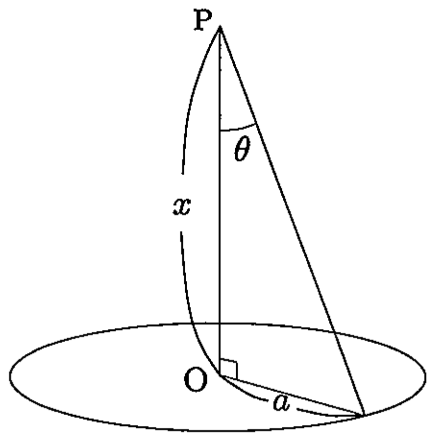


図1

[2] 図2に示すように，半径aの円形コイルの中心軸上を運動してコイルに接近する磁荷gをもつ点磁荷を考え，コイルに誘導される電流について考えよう。点磁荷がその位置から距離rの場所につくる磁束密度の大きさは

$$B(r)=\frac{g}{4\pi r^2}$$

で与えられる。また，図2の点Pに点磁荷があるとき，コイルを貫く磁束Φは，Pを中心とする半径rの球面のうちコイルによって切られた部分（コイルを別の方向から見た図3の斜線部）の面積Sを使って

$$\Phi=B(r)S$$

で与えられる。以下では$g>0$および図2において$x_1>x_2>0$とする。

1）曲面の面積Sが$S=2\pi r^2(1-\cos\theta)$となることを示せ。

2）点磁荷の接近によりコイル内に発生する起電力Vをθと$\dot{\theta}(=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$の関数として求めよ。さらに，コイルの電気抵抗が$R$のときの，コイル内に流れる電流$I$を$\theta$と$\dot{\theta}$の関数として求めよ。

3）点磁荷の接近によりコイルに流れる電流の向きは図3の (a), (b) のどちらか，理由とともに答えよ。

4）点磁荷が点P_1から点P_2まで移動する間にコイルに流れる全電荷量Qをa, x_1, x_2などを使って表せ。

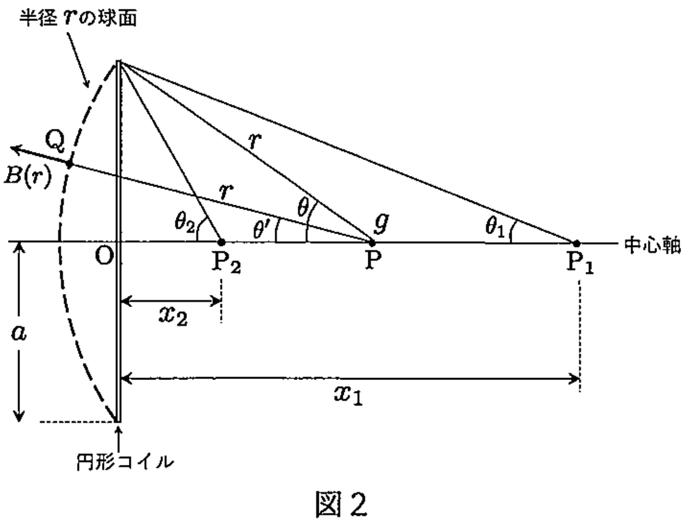


図2

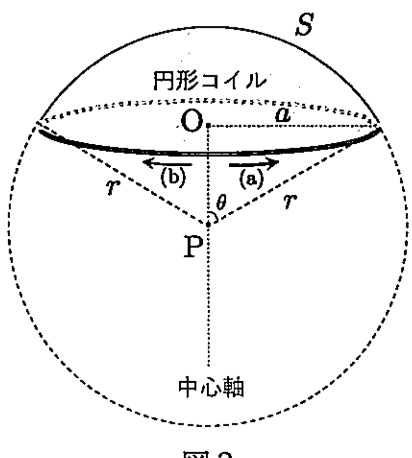


図3

物3

[1] 任意の演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の交換子を $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ で定める。さらに任意の演算子 $\hat{C}$ と任意のベクトル $|\psi\rangle$ があるとき，以下の関係式が成り立つことを示せ。

1) $\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle=[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle+\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle$

2) $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$

スピン演算子と呼ばれる $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ はエルミート演算子であり，かつ

$$[\hat{S}_x,\hat{S}_y]=i\hat{S}_z,\qquad [\hat{S}_y,\hat{S}_z]=i\hat{S}_x,\qquad [\hat{S}_z,\hat{S}_x]=i\hat{S}_y$$

を満たすものとする。ただし $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位。また，$\hat{A}\hat{A}=\hat{A}^2$ と書いて，

$$\hat{S}_+=\hat{S}_x+i\hat{S}_y,\qquad \hat{S}_-=\hat{S}_x-i\hat{S}_y,\qquad \hat{T}=\hat{S}_x^2+\hat{S}_y^2+\hat{S}_z^2$$

とおく。これらについて以下の問に答えよ。

[2] スピン演算子について以下の関係式が成り立つことを示せ。

1) $[\hat{S}_z,\hat{S}_+]=S_+$

2) $[\hat{S}_z,\hat{S}_-]=-S_-$

3) $\hat{T}=\hat{S}_-\hat{S}_++\hat{S}_z^2+\hat{S}_z$

4) $[\hat{S}_+,\hat{T}]=0$

[3] ベクトル $|\phi\rangle$ と実数 α に対して $\hat{S}_z|\phi\rangle=\alpha|\phi\rangle$ が成り立つならば，$|\phi_+\rangle=\hat{S}_+|\phi\rangle$ とおくと $\hat{S}_z|\phi_+\rangle=(\alpha+1)|\phi_+\rangle$ が成り立つことを示せ。

[4] ベクトル $|\phi\rangle$ と実数 α に対して $\hat{S}_z|\phi\rangle=\alpha|\phi\rangle$ が成り立つならば，$|\phi_-\rangle=\hat{S}_-|\phi\rangle$ とおくと $\hat{S}_z|\phi_-\rangle=(\alpha-1)|\phi_-\rangle$ が成り立つことを示せ。

[5] 以上より，演算子 $\hat{S}_z$ の固有値は $\cdots,\alpha-2,\alpha-1,\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\cdots$ のような間隔1の数列になることがわかる。この数列の最大値 $\alpha_{\max}$ があれば，$\hat{S}_z$ の固有値 $\alpha_{\max}$ に属する固有ベクトル $|\phi_{\max}\rangle$ は $\hat{S}_+|\phi_{\max}\rangle=0$ を満たす。このとき，

$$\hat{T}|\phi_{\max}\rangle=\alpha_{\max}(\alpha_{\max}+1)|\phi_{\max}\rangle$$

が成り立つことを示せ。

（物3の問題は次のページに続く）

（物３の問題の続き）

[6] スピン演算子 $\hat{S}_z$ の固有値は $-\frac{1}{2}j,\ -\frac{1}{2}j+1,\ \cdots,\ \frac{1}{2}j-1,\ \frac{1}{2}j$ という数列であり，各固有値は縮退していない。ただし j は正の整数である。h は磁気モーメントと磁場の強さに比例する実数とし，ハミルトニアン

$$\hat{H} = -h\hat{S}_z$$

に従う系を考える。h は正または0または負の値をとりうる。$T\ (\geq 0)$ は絶対温度で，k_{B} はボルツマン定数とし，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とおく。系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるとする。種々の双曲線関数の定義式

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

と，$|x| \ll 1$ のとき成り立つ近似式

$$\coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x$$

を使ってよい。以下の問に答えよ。

1) $\theta = \beta h$ とおいて，分配関数

$$Z = \mathrm{Tr}\big(e^{-\beta\hat{H}}\big) = \mathrm{Tr}\big(e^{\beta h\hat{S}_z}\big) = \sum_{m=0}^{j} e^{\beta h(-\frac{1}{2}j+m)} = \sum_{m=0}^{j} e^{\theta(-\frac{1}{2}j+m)}$$

を求めよ。

2) スピンの期待値（磁化）

$$M = \frac{\mathrm{Tr}\big(\hat{S}_z\, e^{-\beta\hat{H}}\big)}{\mathrm{Tr}\big(e^{-\beta\hat{H}}\big)} = \frac{1}{Z}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2}j+m\right)e^{\theta(-\frac{1}{2}j+m)}$$

を求めよ。

3) $|\theta|$ が無限に大きくなる極限は低温・高温のどちらに相当するか答えよ。また，この極限は強磁場・弱磁場のどちらに相当するか答えよ。さらに，$\theta \to +\infty$ と $\theta \to -\infty$ の極限における M の収束値をそれぞれ求めよ。

4) θ が0に近づく極限は低温・高温のどちらに相当するか答えよ。また，この極限は強磁場・弱磁場のどちらに相当するか答えよ。さらに，θ について1次のオーダーの M の近似式を求めよ。

5) θ を横軸，M を縦軸として，関数 $M(\theta)$ のグラフを描け。グラフの軸には目安となる数量で目盛りをつけよ。

（物３の問題はここで終わり）

化 1

以下の問[１]から[３]に答えよ。

[１] 水素分子 H_2 のシュレーディンガー方程式を書け。ただし次の定数を必ず用いること。

陽子の質量 m_p, 電子の質量 m_e, 素電荷 e, 真空の誘電率 ε_0, プランク定数 h

その他に必要な記号，定数も定義の上で使ってよい。

[２] 酸素分子 O_2 が常磁性を示す理由を，分子軌道と電子配置を示して説明せよ。

[３] ２原子分子のハミルトニアン H は，原子核の質量を含む項 H_n と，それ以外 H_e の和 $H = H_n + H_e$ になる。この H_e の固有値 U_k を小さなものから２個求めたところ，

$$U_1(R) = D\left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{12} - 2\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6}\right] \tag{1}$$

$$U_2(R) = D\left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6} - \frac{1}{4}\right] \tag{2}$$

となったとする。ここで R は原子核間距離，σと D はある正の定数である。固有値 U_1, U_2 に対応する，正規直交化された固有関数をΦ_1，Φ_2とする。H_n の影響を次のように考えよう。

1） 一般に$V_{ij} = \int \Phi_i H_n \Phi_j d\tau \neq 0$である。値 $V_{12} = V_{21}$ が小さな正の数 V となり，その他の V_{ij} は０だったと仮定する。ハミルトニアン H_e の行列要素に V_{ij} が加わると，その固有関数Φはどう変化するか。$\Phi = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$と仮定し，エネルギー期待値を最小化して，数 C_1, C_2 を決める永年方程式を導出せよ。

2） この永年方程式を解いて，対応する固有値 E_1, E_2 を求めよ。

3） 縦軸に E_k (k=1,2)，横軸に原子核間距離 R を取り，上で求めた E_k の概略を図示せよ。また定数σと D の意味を答えよ。ただし数値の有効桁は２桁でよい。V は D の約 1/10 の大きさとする。実数 x と x^{-6} の関係を示す，次の数表を用いてもよい。

x	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.88	0.90	0.95	1.00	1.10
x^{-6}	3.54	3.29	3.06	2.85	2.65	2.47	2.15	1.88	1.36	1.00	0.564
x	1.20	1.30	1.40	1.44	1.48	1.50	1.52	1.56	1.60	1.70	1.80
x^{-6}	0.335	0.207	0.133	0.112	0.0952	0.0878	0.0811	0.0694	0.0596	0.0414	0.0294

化２

以下の問［１］と［２］に答えよ。

［１］ 次の文章を読んで，以下の１）から４）に答えよ。

次に示すニトロアミド NO_2NH_2 の分解反応を考える。

$$NO_2NH_2 + OH^- \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} NO_2NH^- + H_2O \qquad (1)$$

$$NO_2NH^- \xrightarrow{k_2} N_2O + OH^- \qquad (2)$$

ここでk_1，k_{-1}，k_2はそれぞれの反応速度定数である。反応(2)におけるN_2Oの生成速度は

$$\frac{d[N_2O]}{dt} = k_2[NO_2NH^-] \qquad (3)$$

と表される。式(1)の両方向の反応が，反応(2)に比べて非常に$\boxed{\text{（ア）}}$と仮定した時には，式(1)で平衡が成り立ち，律速段階は$\boxed{\text{（あ）}}$となる。ここで，平衡定数を濃度もしくは反応速度定数を用いて表すと

$$K = \frac{[NO_2NH^-][H_2O]}{[NO_2NH_2][OH^-]} = \left(\qquad \text{(a)} \qquad \right) \qquad (4)$$

となる。式(4)を用いて式(3)から濃度$[NO_2NH^-]$を消去すると，N_2O の生成速度は k_1，k_{-1}，k_2を用いて

$$\frac{d[N_2O]}{dt} = \left(\qquad \text{(b)} \qquad \right) \qquad (5)$$

と表される。

一方，反応(2)が式(1)の両方向の反応に比べて非常に$\boxed{\text{（イ）}}$と仮定した時には，式(1)で平衡は成り立たず，律速段階は$\boxed{\text{（い）}}$となる。この時，NO_2NH^-に対して定常状態近似を適用すると

$$\frac{d[NO_2NH^-]}{dt} = \left(\qquad \text{(c)} \qquad \right) = 0 \qquad (6)$$

であるから

$$[NO_2NH^-] = \left(\qquad \text{(d)} \qquad \right) \approx \left(\qquad \text{(e)} \qquad \right) [NO_2NH_2][OH^-] \qquad (7)$$

となる。ここで，右辺の近似には上述の仮定を考慮している。式(7)を用いて式(3)から濃度$[NO_2NH^-]$を消去すると，N_2O の生成速度は

$$\frac{d[N_2O]}{dt} = \left(\qquad \text{(f)} \qquad \right) \qquad (8)$$

と表される。

1） (a)から(f)に当てはまる式を記せ。

2） 空欄（ア）と（イ）にそれぞれ当てはまる語句は，速い，遅いのどちらであるかを答えよ。

3） 空欄（あ）と（い）にそれぞれ当てはまる反応は，式(1)の正反応，式(1)の逆反応，反応(2)のいずれであるかを答えよ。

4） 空欄（あ）と（い）に当てはまる反応のどちらが実際に律速段階であるかを確かめるとしたら実験で何を調べたらよいか答えよ。その理由も式(5)と式(8)に基づいて述べよ。

［2］ 次の文章を読んで，以下の1）から4）に答えよ。T と R はそれぞれ温度と気体定数である。

古典的なエネルギーの等分配則によると，1 mol の理想気体に対して，並進と回転には1自由度あたり $RT/2$ のエネルギーが割り振られる。２原子分子について並進と回転のみを考えて，この等分配則を適用すると，1 mol の２原子分子の内部エネルギーUは$\boxed{\text{（ウ）}}$である。これを用いて定積熱容量 $C_V = (\partial U/\partial T)_V$ を考える。1 mol あたりの定積熱容量 $C_{V,\mathrm{m}}$を R で割った値$(C_{V,\mathrm{m}}/R)$は$\boxed{\text{（エ）}}$となる。この計算値を室温での実測から得られた$C_{V,\mathrm{m}}/R$と比べると，(う) <u>O_2ではよい一致が見られる</u>が，(え) <u>Cl_2での一致はよくない</u>。

1） 空欄（ウ）と（エ）にそれぞれ適切な数式あるいは数値を答えよ。

2） 並進と回転，振動の寄与を考えて，古典的なエネルギーの等分配則から期待されるメタン（CH_4）分子の $C_{V,\mathrm{m}}/R$ を答えよ。解答の途中過程も記すこと。

3） 下線部（う）となる理由を，並進と回転，振動のエネルギー準位間隔の大きさの違いに触れながら述べよ。

4） 下線部（え）となる理由を述べよ。

化３

ある有機化合物とその鏡像体とを重ね合わせることができない時に，その化合物を「キラルである」という。天然に存在するキラルな有機化合物の構造と反応について次の問に答えなさい。

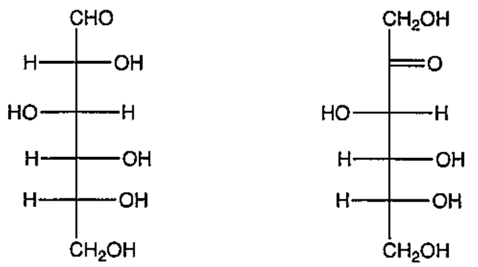
1）実像と鏡像を区別するために様々な表記法がある。以下のそれぞれについて，どのような区別による表記法であるかを説明しなさい。

(a)（+）と（-）　(b) *R* と *S*　(c) D と L

2）ヒトのタンパク質を構成するアミノ酸のひとつであるトレオニンは次の示性式を持つ。トレオニンのキラリティがわかるように化学構造式を書きなさい。

$CH_3CH(OH)CH(NH_2)CO_2H$

3）下に２つの糖，グルコース（左図）とフルクトース（右図）がフィッシャー式で書いてある。左の分子をアルカリ条件で異性化させると右の分子が得られる。推測される中間体を書いて反応機構を説明しなさい。

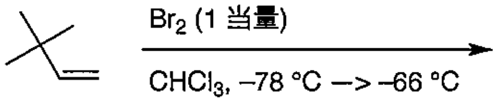


4）鎖状のグルコースは，非酵素的に分子内で反応して 6 員環ヘミアセタールを与える。その際，不斉炭素が新たに生じ，２種類の立体異性体の混合物となる。これら２種類の化学構造式を書きなさい。また，このような立体異性体をお互いになんと称するか答えなさい。

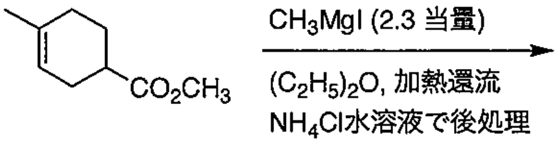
化４

以下に記載の反応式において，主生成物とそれを与える反応機構について説明しなさい。反応機構を解答する際には，電子の流れを示す矢印を用いること。

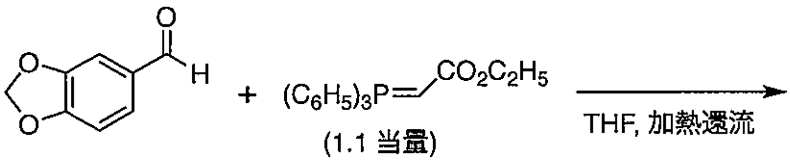
１）



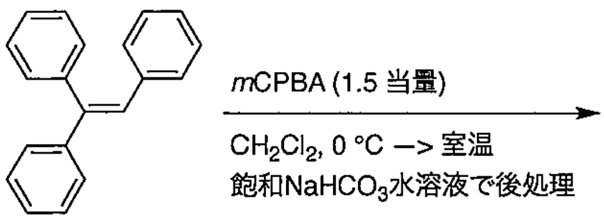
２）



３）

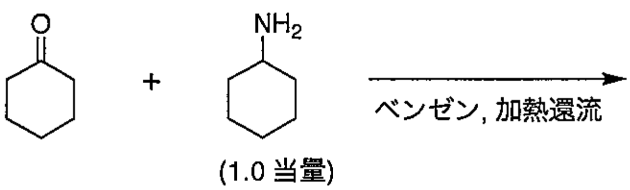


４）



*m*CPBA: 3-chloroperoxybenzoic acid

５）



化 5

ベンズアゼピン誘導体の合成に関する以下の問に答えなさい。ベンズアゼピン誘導体（化合物 **6**）の合成経路は図 1 に示してある。反応機構を解答する際には，電子の流れを示す矢印を用いること。

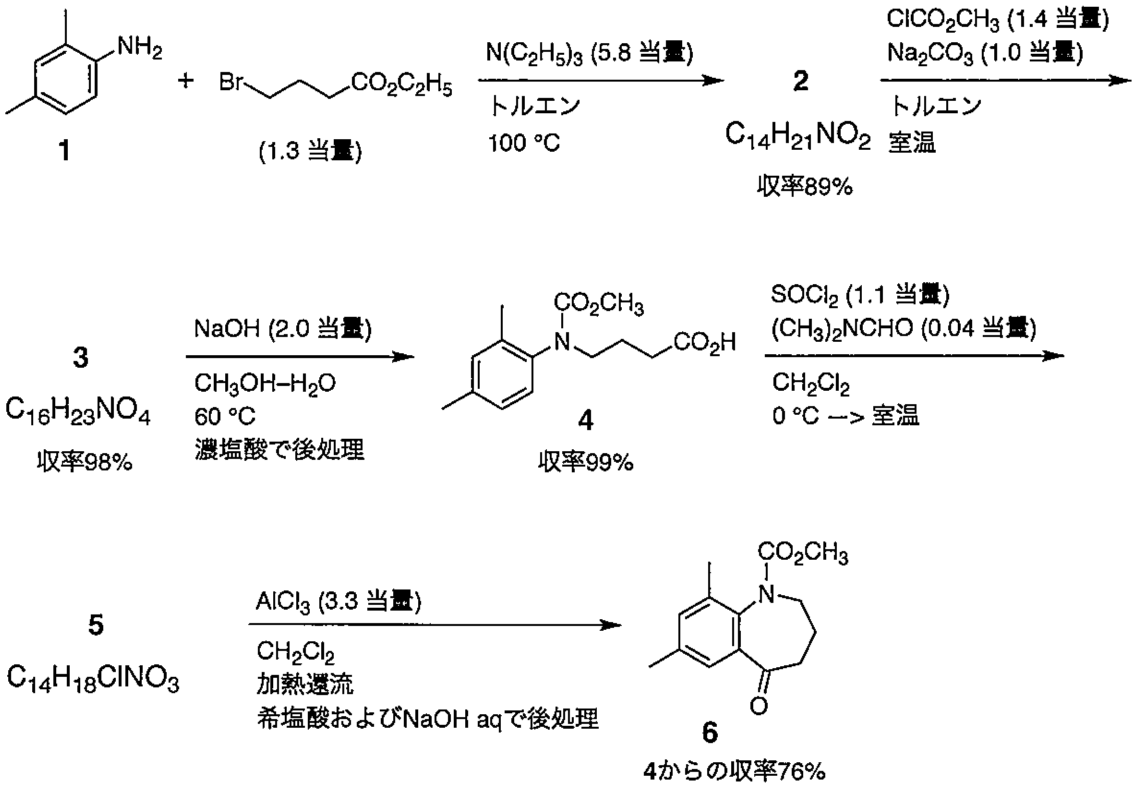


図 1. 化合物 **6** の合成経路

1）化合物 **2** の構造および化合物 **2** が生成する反応の機構を書きなさい。

2）化合物 **3** の構造および化合物 **3** が生成する反応の機構を書きなさい。

3）化合物 **4** が生成する反応の機構を書きなさい。

4）化合物 **5** の構造および化合物 **5** が生成する反応の機構を書きなさい。ただし，0.04 当量存在するジメチルホルムアミドの役割にも留意すること。

5）化合物 **6** が生成する反応の機構を書きなさい。

6）化合物 **5** から化合物 **6** の反応では，塩化アルミニウム (2.36 mol) のジクロロメタンの懸濁液 (1.96 L) に，化合物 **5** (0.72 mol) のジクロロメタン溶液 (0.50 L) を 3 時間かけてゆっくりと滴下する。その理由を述べなさい。

生１

次の２つの問に答えよ。

［１］次の文を読み，各問に答えよ。

ゲノム DNA は生物の多様な構造と機能の情報を維持・伝達する役割を持ち，「生命の設計図」などと呼ばれる。DNA 分子は，糖，塩基，（ア）からなる（イ）が鎖状に重合してできる。一本鎖 DNA においては，（ウ）結合により連結した糖－（ア）の繰り返し構造が（エ）をなし，（エ）のそれぞれの糖が塩基を１つずつ持つため，１次元的な塩基配列が形成される。塩基は相補的な組み合わせで塩基対を形成するが，細胞内ではほとんどの場合，互いに相補的な塩基配列を持つ２本の一本鎖 DNA 同士が塩基対を形成することにより結合し，二重ラセン構造を示す。(サ)一本鎖 DNA は鎖に沿った化学的な極性を持つが，二重ラセンにおいて２本の一本鎖 DNA は互いに（オ）の関係で巻きついている。またラセン一巻きは約（カ）塩基対分の（イ）から成っている。二重ラセン構造の塩基対は，（キ）の際には一部が解離し，露出した塩基配列が（ク）として働き，相補的な塩基を持つ（イ）を取り込むことで，情報が維持される。

（キ）の際に，（ク）鎖と相補的でない塩基を持つ（イ）がいったん取り込まれることもあるが，(シ)このような間違いはすぐに修復される。(ス)（キ）が正しく行われ，（ク）鎖と相補的な塩基配列ができた後でも，さまざまな原因により，それらの一部が変化することもある。この場合，(セ)（ク）となっていた塩基が元のままなら，その情報を使って修復が行われる。放射線の照射などにより，二重ラセン DNA の２本の一本鎖が両方とも壊れ，無傷の（ク）が使えなくなることもあるが，(ソ)このようなときにも，塩基配列を元どおりにする仕組みが存在する。しかし，これらの修復の働きをかいくぐって塩基配列に変異が定着することもあり，これが（ケ）細胞で生じると場合によっては遺伝病の原因となる。

１）次の語群から適切な語を選び（ア）～（ケ）に入れよ。
［デオキシリボヌクレオチド，リボヌクレオチド，ヌクレオシド，アミノ酸，リン酸，クエン酸，ホスホジエステル，ペプチド，水素，主鎖，副鎖，側鎖，平行，逆平行，3，10，30，100，生殖，体，転写，翻訳，複製，鋳型］
２）下線（サ）の極性を５０～１００字程度で説明せよ。
３）下線（シ）の仕組みを５０～１００字程度で説明せよ。
４）下線（ス）の一例を２０～４０字程度で説明せよ。
５）下線（セ）または下線（ソ）のどちらかを選び，その仕組みの一例を１００～２００字程度で説明せよ。

［２］真核生物の転写開始を，次の語群の語を用い２５０～３００字程度で説明せよ。必要に応じて図を用いてもよい。
［プロモーター，TATA ボックス，転写基本因子，転写開始複合体，転写開始部位，RNA ポリメラーゼ II，二本鎖 DNA の開裂］

生２

以下の（a）～（d）の実験方法から２つを選び，それぞれについて各問に答えよ。必要に応じて図を用いてもよい。

(a) プラスミドベクターを用いたDNAクローニング
(b) マウスにおける遺伝子ノックアウト法
(c) 塩基配列決定法（ジデオキシ法）
(d) CRISPR系によるゲノム編集

［１］実験の目的を２０字から４０字程度で説明せよ。

［２］実験の原理を２００字から３００字程度で説明せよ。

［３］実験の手順を３００字から４００字程度で説明せよ。

生 3

[1] 地球上の生物種は大きく 3 群に分類される。これを A, B, C とする。私たちヒトは A に属す。

1）A, B, C はそれぞれ何か。B と C のそれぞれに属する代表的な生物種（総称で良い）と，その生物がどういうものかを簡単に説明せよ。

2）A, B, C のような進化的に非常に離れた種を比較する場合，進化的によく保存している「あるもの」を利用する。一般的に用いられる方法と，「あるもの」がこの場合に有効な理由を簡単に述べよ。

3）A のゲノムは B, C に比べて大きい。これを核に収納するための仕組みを説明せよ。

4）A の細胞の中には B や C の細胞そのものと類似しているオルガネラがある。それを 1 つ挙げ，A の細胞中での役割を述べよ。

[2] ヒトゲノムに関する以下の文章の空欄を埋めよ。

ヒトゲノムは大きいが[ア]をコードしていない部分もある。遺伝子に対応する[イ]のうち，[ア]をコードしている部分を[ウ]，していない部分を[エ]と言う。[ウ]はゲノムの[オ]%程度であることが知られている。[カ]で[ア]を合成する時の設計図となる[キ]を作る時には [ウ]をつなげるが，[ウ]の組み合わせを変えて遺伝子を多様化する仕組みを[ク]と言う。

[3] 遺伝子が進化して新機能を獲得する代表的なメカニズムを 3 つあげ，それぞれを 50 文字程度で説明せよ。

地１

震度とマグニチュードは，日本で大きな地震が発生した直後にほぼ必ず発表される情報である。これらについて下記の問に答えよ。説明には図を用いてもよい。

［１］ 震度とマグニチュードについて，それぞれ違いが分かるように説明せよ。ただし説明全体で３００字以内に収めること。

［２］ マグニチュードの定義はいくつかあり，その中の代表的なものとしてローカルマグニチュードとモーメントマグニチュードがある。両者について，それぞれ違いが分かるように説明せよ。ただし説明全体で３００字以内に収めること。

地２

地理学（測地学）に関する下記の問に答えよ。説明には図を用いてもよい。

［１］ 地球の形を近似的に示すモデルとして，ジオイド面と楕円体面がある。両者について，それぞれ違いが分かるように説明せよ。ただし説明全体で３００字以内に収めること。

［２］ 地表面上の位置を示す代表的な指標として，緯度・経度がある。このうち緯度の定義はいくつかあるが，地理緯度（または測量緯度）と天文緯度について，それぞれ違いが分かるように説明せよ。ただし説明全体で３００字以内に収めること。

情 1

以下の問に答えよ。

[1] 次のC言語プログラムの標準出力への表示結果を示せ。

```
#include <stdio.h>
int main(void)
{
        int x1 = 4321, x2 = 0xf0f0;
        printf(" %x %d %d %x \n", x1, x1+x2, x1&x2, x1>>4);
        return 0;
}
```

[2] 整数値を要素とする配列変数の要素を逆順に並べるプログラムをC言語で作成した。関数 f には整数型配列変数 a と整数型変数 n を引数として与える。下線部を適切に埋めよ。

```
#include <stdio.h>
int f(int a[], int n)
{
        int ___(1)___ ;
        while( i < n/2 ){
                b = a[i];
                a[i] = ___(2)___ ;
                ___(2)___ = b;
                ___(3)___ ;
        }
        return 0;
}
int main(void)
{
        int n = 5,i;
        int a[] = {1,2,3,4,5};
        f(a,n);
        for( i=0; i<n; i++ ) printf("%d",a[i]);
        return 0;
}
```

```
標準出力結果例：

54321
```

[3] 文字列変数の長さを計算するプログラムを，再帰的プログラミングを用いてC言語で作成した。関数 f には文字型配列変数 a と整数型変数 n を引数として与える。下線部を適切に埋めよ。

```
#include <stdio.h>
int f(char *a, int n)
{
        if( *a == ___(1)___ ){
                return ___(2)___ ;
        }else{
                return f( ___(3)___ ) ;
        }
}
int main(void)
{
        int n = 0;
        char a[] = "This is a pen.";

        printf("%d", f(a,n));
        return 0;
}
```

```
標準出力結果例：

14
```

情２

ノードとリンクからなるネットワークとその特徴に関する次の問に答えなさい。

[１] 図１に示すネットワーク（数字はノードの番号）について，ノード１と４に関する次の指標の値をそれぞれ示しなさい。

平均経路長：対象ノードから他のノードそれぞれに至る最短経路（リンク数が最小の経路）を計算する。対象ノードの平均経路長はすべての他のノードに関するこの長さの平均。

クラスタ係数：対象ノードにつながる他ノードからなる可能なペアのうち，リンクでつながっているペアの割合。

媒介中心性：対象ノード以外のノードからなるすべてのペアに関して，ペア間の最短経路をすべて求め，対象ノードが経路に含まれる割合を計算する。対象ノードの媒介中心性はこの総和。

[２] 110 個のノードを円環状に並べる。各ノードについて，右回り方向に１つ隣と２つ隣のノードそれぞれに対してリンクを張るが，その際各リンクについて Pの確率で，隣に張ることはせずに自身以外のランダムに選んだノードに張るものとする。ただしリンクの重複はないものとする。

１）[１]の指標の全ノードに関する平均をネットワーク全体の指標とする。P の値を 0 から 1 までの範囲において 0.05 刻みで設定し，各 5 回ずつネットワークを生成した時の平均経路長とクラスタ係数を図２に示す。グラフ中のＡとＢのどちらが平均経路長，もしくは，クラスタ係数であるかを示した上で，このような結果になる理由を説明せよ。

２）このネットワークについて，媒介中心性に関して上位 15 個のノードを削除した場合と，下位 15 個のノードを削除した場合を考える。なお，削除するノードにつながるリンクも同時に削除されるものとする。

ネットワーク上のノードの状態の離散的な時間発展を次のように定義する。各ノードはＡまたはＢの状態のいずれかをとる。各時刻において，各ノードは，リンクでつながる他のノードをランダムに一つ選び，その状態が Ａ である場合，次の時刻の自身の状態をＡとし，そうでない場合は現在の状態を維持する。

媒介中心性に関して上位 15 個のノードを削除した，もしくは，下位 15 個のノードを削除したのち，初期状態でランダムに選んだ１つのノードの状態をＡ，残りをＢとして時間発展させたとき，いずれの場合のほうが総じて早く Ａ ばかりの状態に収束しやすいと考えられるか，理由とともに説明しなさい。

[３] ノードをウェブページ，有向リンクをそのページから別のページへのリンクとみなしたネットワークを考える。あるノードを出発点とし，そこから他のノードに向かうリンク先のうちランダムに一つノードを選んで移動する。この操作を十分繰り返した時，各ノードでの訪問頻度はそのページの持つ重要さの指標として用いられることがある。

訪問頻度の高いノードは，ネットワークの構造上どのような特徴を持つか説明しなさい。
また，この指標を用いる利点と欠点について考えを述べなさい。

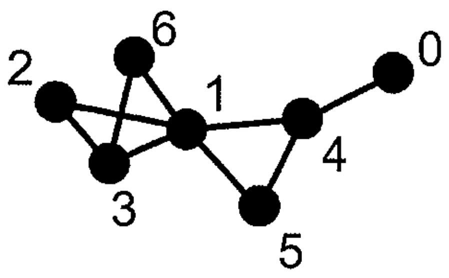


図１

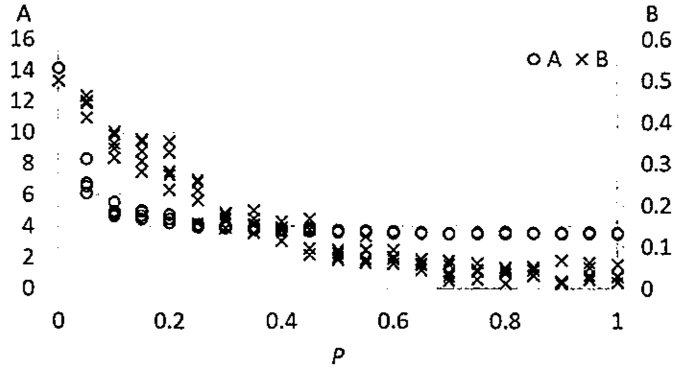


図２

情 3

[1] 丸で示す節点と，矢印で示す有向辺からなる有向グラフにおいて，最短距離とその経路を探索する。節点 n から節点 m への辺は矢印で図示し，$(n,\ m)$ と表す。また，辺の傍の数字は距離を示す。

1) 図 1 の有向グラフにおいて，直接結合している 2 節点間の最短距離とその経路を，節点 1 から節点 5 までに関して表 1 にまとめる。表 1 の空欄 (a) から (f) を埋めなさい。

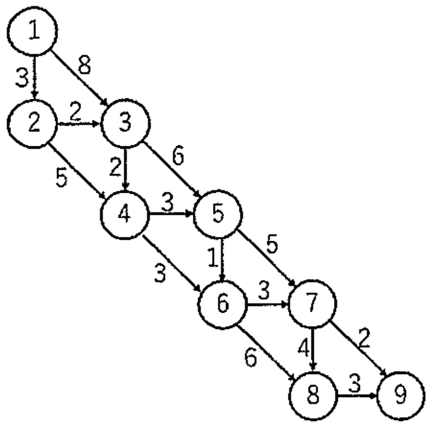


図 1

表 1

節点	節点	最短距離	最短距離の経路
1	2	3	(1, 2)
1	3	5	(1, 2), (2, 3)
2	3	2	(2, 3)
2	4	(a)	(b)
3	4	2	(3, 4)
3	5	(c)	(d)
4	5	(e)	(f)

2) 問題を部分問題へと分割し，分割した問題を解いた結果を，たとえば表 1 のように記録し，記録した部分問題の解を参照しながら問題を解く方法は，動的計画法とよばれる。動的計画法を用いて，図 1 に示す有向グラフの節点 1 から節点 9 までの最短距離と，その経路を求めなさい。また，求める過程についても説明しなさい。

[2]

1) 図 2 の有向グラフにおいて，節点 1 から節点 9 までの最短距離とその経路の総数を求めなさい。また，求める過程についても説明しなさい。

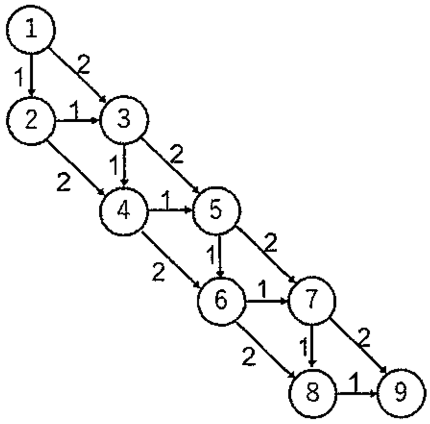


図2

2) 図3の有向グラフにおいて，節点1から節点nまでの最短距離とその経路の総数を考える。以下の『』で囲まれた文章の（あ）と（い）の空欄に入る，適切な数式を答えなさい。

『節点1から節点 $m-1$ までの最短距離の経路の総数を関数 $dp(m-1)$と表すと，$dp(n)=$（　あ　）となる。また最短距離は（　い　）である 』

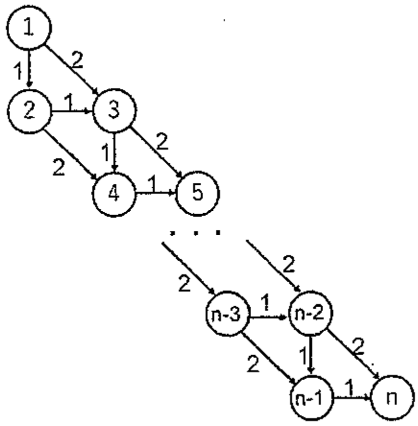
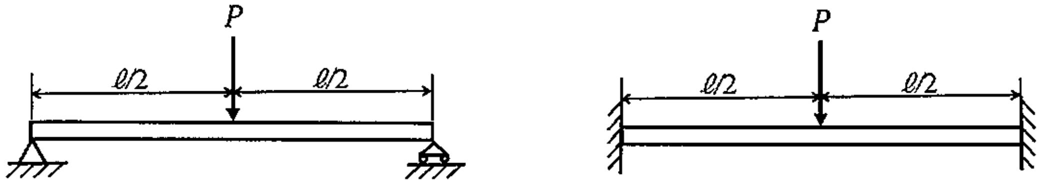


図3

工1

[1]　長さと断面形状は一致するが，両端の支持方式が異なる二種類のはり A と B がある。図1に示すように，これらのはりには中央に荷重 P が印加されている。はり A と B のばね定数を k_A と k_B とするとき，$k_A = k_B$ となるためのはり A と B のヤング率の比 $E_A : E_B$ を求めよ。



(a)はり A　　(b)はり B

図1

[2]　図2に示すように，厚さ t の板で作られた半径 r の十分長い薄肉円筒殻が内圧 p と z 軸まわりのトルク T を同時に受けている。以下の問に答えよ。

1)　図2に示すように，両端から十分離れた位置の薄肉円筒殻に微小要素 A をとる。微小要素 A に発生する周方向応力 σ_θ，軸応力 σ_z およびせん断応力 τ を求めよ。

2)　微小要素 A に作用する最大せん断応力を主応力 σ_1 と σ_2 を用いて表せ。

3)　この薄肉円筒殻の降伏条件は最大せん断応力説（トレスカの降伏条件）に従い，最大せん断応力が k のとき微小要素 A は降伏するものとする。降伏するときの p を求めよ。

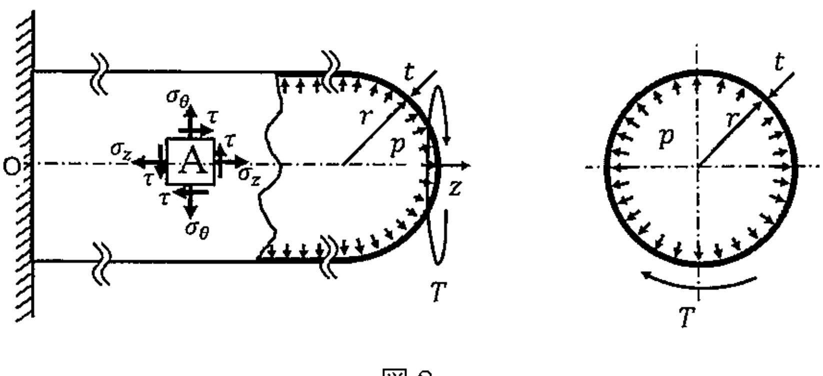


図2

工２

［１］ 図１に示すように，二次元空間（x-y平面）における流線の微小線素をds，速度ベクトルを$\boldsymbol{V}$とする。xおよびy方向のdsの成分をdxおよびdy，xおよびy方向の$\boldsymbol{V}$の成分をuおよびvとする。この場合，流線の方程式は次式で表されることを示せ。

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

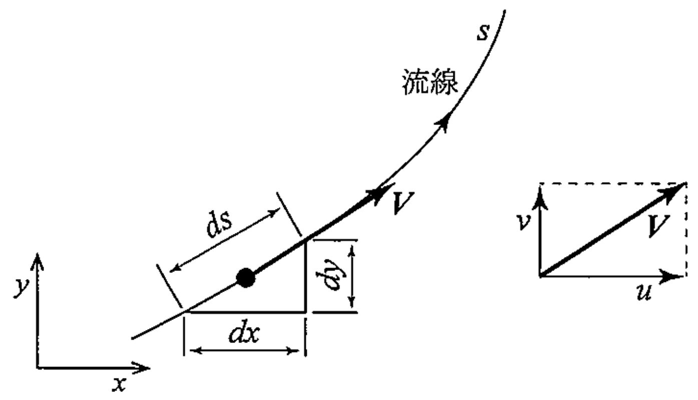


図１

［２］ 二次元空間（x-y平面）における非圧縮・非粘性流れについて，以下の問に答えよ。ただし，時間をt，xおよびy方向の速度成分をuおよびvとする。

1） 渦度ωの定義を示せ。

2） つぎの渦度方程式を導け。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=0$$

3） 渦度方程式が意味する渦度の特性を説明せよ。

工3

時間関数 $f(t)$ をラプラス変換した関数を $F(s)$ のように書くことにする。

[1] 制御系の出力は回転角であり，$\Theta(s) = \frac{4s+12}{2s^2+5s+1}$ で与えられている。以下の問に答えよ。

1）回転角の初期値 $\theta(t = 0)$ を求めよ。

2）回転角速度 $\Omega(s)$ を求めよ。

3）回転角速度の初期値 $\omega(t = 0)$ を求めよ。

[2] 図１に示す制御系について，以下の問に答えよ。ただし，図中の K，T_1，T_2 は，正の実数である。

1）一巡伝達関数（開ループ伝達関数）$L(s)$ を求めよ。

2）入力 $U(s)$ から出力 $Y(s)$ までの閉ループ伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

3）ラウスの安定判別法を用いて，系を安定とするための K の範囲を T_1 と T_2 を用いて表せ。

4）$L(s)$ のベクトル軌跡の略図を描け。

5）$K = 10$ のとき，$L(s)$ のベクトル軌跡が点 $(-0.2, 0)$ で実軸と交わる。ナイキストの安定判別法を用いて，系を安定とするための K の範囲を求めよ。

6）K の値の増大により，系の安定性・速応性・定常特性がどう変化するかを記述せよ。

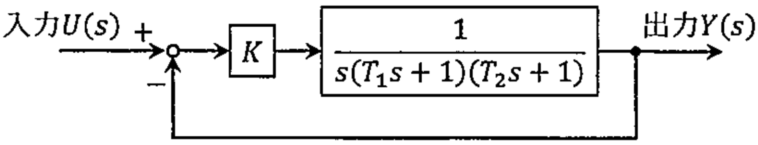


図１