令 和 ６ 年 度

名古屋大学大学院情報学研究科
複雑系科学専攻
入学試験問題（専門）

令和５年８月２日

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生の志願者は、日本語と日本語以外の１言語間の辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

４．日本語または英語で解答すること。

５．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認すること。

６．問題は数１、数２、物１、物２、物３、化１、化２、化３、化４、生１、生２、生３、地１、地２、情１、情２、情３、工１、工２、工３の２０科目がある。このうち３科目を選択して解答すること。なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。

７．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

８．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

９．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出すること。

１０．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

数1

$N\times N$ 行列 X の行列式 $\det X$ は以下のように定義される。

$$\det X \equiv \sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\cdots\sum_{j_N=1}^{N}\epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_N}X^1_{j_1}X^2_{j_2}\cdots X^N_{j_N}$$

ここで，X^i_j は行列 X の i 行 j 列成分であり，$\epsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_N}$ は $(j_1,j_2,\ldots,j_N)$ が $(1,2,\ldots,N)$ の順番を偶数回置換して得られる場合は 1，奇数回置換して得られる場合は -1，それ以外の場合は 0 であるものとする。以下の問に答えよ。

[1] 以下の行列 F の行列式 $\det F$ を求めよ。

$$F=\begin{pmatrix}0&3&0&0&0\\0&0&5&0&2\\1&0&1&0&0\\0&0&1&4&4\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

[2] 3×3 行列

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&-3&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}$$

について考える。

1) 行列 A の固有値は 3 つある。これらを $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3$ と書くことにする。λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ。

2) 行列 A の固有値 λ_i に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ で，第 3 成分が 1 となるものを $i=1,2,3$ について求めよ。すなわち，固有ベクトルを

$$\boldsymbol{v}_i\equiv\begin{pmatrix}v_i^1\\v_i^2\\v_i^3\end{pmatrix},\qquad (i=1,\,2,\,3)$$

と書くとき，$v_i^3=1$ となる $\boldsymbol{v}_i$ $(i=1,\,2,\,3)$ を求めよ。

3) 行列 V を

$$V\equiv\begin{pmatrix}v_1^1&v_2^1&v_3^1\\v_1^2&v_2^2&v_3^2\\v_1^3&v_2^3&v_3^3\end{pmatrix}$$

と定義する。このとき $\tilde{A}\equiv V^{-1}AV$ を求めよ。

（数 1 の問題は次のページに続く）

（数 1 の問題の続き）

4) A^{2023} を求めよ。表記の簡単化のため必要なら $2^{2023} \equiv P,\ 3^{2023} \equiv Q$ とおきかえてよい。

[3] 3×3 行列

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

について考える。

1) 行列 B の固有値 $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ のうち，2 つは等しくなる。$\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$ とするとき，これらを求めよ。

2) 行列 B の固有ベクトルはその定数倍を除いて 2 つしか存在しない。固有値 μ_1 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{w}_1$ と固有値 $\mu_2 = \mu_3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{w}_2$ のうち，第 3 成分が 1 であるような $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ を求めよ。

3) 単位行列を I と書くとき $(B - \mu_2 I)\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_2$ を満たすベクトル $\boldsymbol{w}_3$ が存在する。$\boldsymbol{w}_3$ を求めよ。

4) 行列 W を

$$\boldsymbol{w}_i \equiv \begin{pmatrix} w_i^1 \\ w_i^2 \\ w_i^3 \end{pmatrix}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

を用いて

$$W = \begin{pmatrix} w_1^1 & w_2^1 & w_3^1 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \\ w_1^3 & w_2^3 & w_3^3 \end{pmatrix}$$

と定義する。この時 $\tilde{B} \equiv W^{-1}BW$ を計算せよ。

5) B^{2023} を求めよ。表記の簡単化のため必要なら $2^{2023} \equiv P,\ 3^{2023} \equiv Q$ とおきかえてよい。

（数 1 の問題はここで終わり）

数 2

[1] 次の微分方程式について考えよう。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-y)y$$

1) 一般解を求めよ。

2) 初期値が $0 < y(0) < \frac{1}{2}$ および $y(0) > 1$ の場合のそれぞれについて，$y(x)$ のグラフの特徴がわかるように概形を描け。

[2] θ によりパラメータ表示された，次の曲線について考えよう。ただし，a, $b > 0$ とする。

$$x = a\mathrm{e}^{-b\theta}\cos\theta, \quad y = a\mathrm{e}^{-b\theta}\sin\theta$$

1) xy 平面上に，$0 \leq \theta \leq 4\pi$ での (x, y) の軌跡の概形を描け。

2) 原点 $(0,0)$ と (x, y) を結ぶ線分の長さを r とする。r と θ の関係式を求めよ。

3) θ が α から $\beta(>\alpha)$ まで変化するときに，原点 $(0,0)$ と (x,y) を結ぶ線分が掃く部分の面積を $S_{\alpha,\beta}$ とする。微小角 $\mathrm{d}\theta$ に対して，$S_{\theta_0,\theta_0+\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$ と表されることを示せ。

4) $S_{0,\pi}$ を求めよ。

5) θ が α から $\beta(>\alpha)$ まで変化するときの (x,y) の軌跡の長さを $L_{\alpha,\beta}$ とする。微小角 $\mathrm{d}\theta$ に対して，$L_{\theta_0,\theta_0+\mathrm{d}\theta} = \sqrt{a^2(b^2+1)}\mathrm{e}^{-b\theta}\mathrm{d}\theta$ と表されることを示せ。

6) $L_{0,\infty}$ を求めよ。

[3] 被食者と捕食者の個体数をそれぞれ x, y として，これらの時間変化をモデル化した，次の 2 次元非線形力学系について考えよう。ただし，$a, b, c, d > 0$ とし，$x, y > 0$ の解を考えることとする。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bxy$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cy + dxy$$

1) この力学系において $V(x,y) = c\ln x + a\ln y - dx - by$ は時間によらず一定であることを示せ。ただし，ln は自然対数を表す。

2) この力学系の不動点 (x_0, y_0) を求めよ。

3) 1) の結果，および，2) で求めた不動点まわりの $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ の符号を考えることにより，xy 平面上での解軌道 (x,y) の振る舞いを説明し，$\left(x_0, \dfrac{y_0}{2}\right), \left(x_0, \dfrac{y_0}{3}\right), \left(x_0, \dfrac{y_0}{4}\right)$ の 3 つの初期値から始まる解軌道を描け。

（数 2 の問題はここで終わり）

物1

3次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ の，直交座標における成分を $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように書き，ベクトル $\boldsymbol{A}$ のノルムを $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$ と定める。2つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積を $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ と定める。3次元空間の原点をOとし，任意の点Pの位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$ のノルムを $r = \|\boldsymbol{r}\|$ と書く。

[1] 力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき，任意の点 P_0 を始点とし任意の点Pを終点とする任意の曲線に沿った線積分

$$U(\mathrm{P}) = -\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

の値が P_0 と P を結ぶ曲線の選び方に依存しないことを，$\boldsymbol{F}$ が保存力場であるという。基準点 P_0 を便宜的に選んで固定したとき，$U(\mathrm{P})$ を点Pにおける位置エネルギーという。以下の問に答えよ。

1）$\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ が変数 s の微分可能な関数であれば $r(s) = \|\boldsymbol{r}(s)\|$ について

$$r\frac{dr}{ds} = x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds}$$

が成り立つことを示せ。このことから，$\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = r\,dr$ としてよい。

2）変数 r の関数 $f(r)$ があり，力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

のようになっていたら，$\boldsymbol{F}$ は中心力場だという。ただし，$r = 0$ の点では f の値は定義されないか，または，$f(0) = 0$ だとする．無限遠点を位置エネルギーの基準点 P_0 に選ぶと，$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で指示される点Pの位置エネルギーは r だけの関数

$$U(r) = \int_r^{\infty} f(r)\,dr \quad \left(= \int_r^{\infty} f(s)\,ds \quad \text{と書いてもよい} \right)$$

になることを示せ。

（物１の問題は次のページに続く）

（物１の問題の続き）

[2] ガウスの法則によれば，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ と任意の3次元領域 V に関して

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \rho\,dV$$

が成り立つ。ただし，∂V は3次元領域 V の表面であり，$\boldsymbol{n}$ は ∂V の内から外に向いている単位法線ベクトルである。以下の問題に現れる物質の誘電率はすべて真空の誘電率 ε_0 と等しいとする。原点Oを中心とする半径 a の球体内部に一定の正の電荷密度 ρ で電荷が分布していると，全電荷量は $Q=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ である。このとき電場は,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

という関数形になる。ただし $r=\|\boldsymbol{r}\|$ とおいた。以下の問に答えよ。

1) $r \geq a$ における $E(r)$ を求めよ（ρ の代わりに Q を使って答えを書け)。

2) $0 \leq r < a$ における $E(r)$ を求めよ（ρ の代わりに Q を使って答えを書け)。

3) 電荷 $-e$（e は正）を持つ粒子は $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$ の力を受ける。無限遠点を位置エネルギーの基準点として，$r \geq a$ における粒子の位置エネルギー $U(r)$ を求めよ。

4) 無限遠点を位置エネルギーの基準点として，電荷 $-e$ を持つ粒子の，$0 \leq r < a$ における位置エネルギー $U(r)$ を求めよ。

5) 球体を貫く，まっすぐで十分細いトンネルを掘って，トンネルの中に質量 m，電荷 $-e$ の粒子を置く。球体の中心とトンネルとの最短距離を h とし，トンネルの中点から粒子までの距離を x とする（下図参照)。粒子はトンネルに沿って動くとし，トンネル内は摩擦はなく，重力もないとする。時刻 t における粒子の位置を $x(t)$，速度を $\dot{x}(t)$ とする。粒子の位置エネルギー U を x の関数で表し，運動エネルギーを $K=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2$ として，ラグランジアン $L(x,\dot{x}) = K - U$ を求めよ。

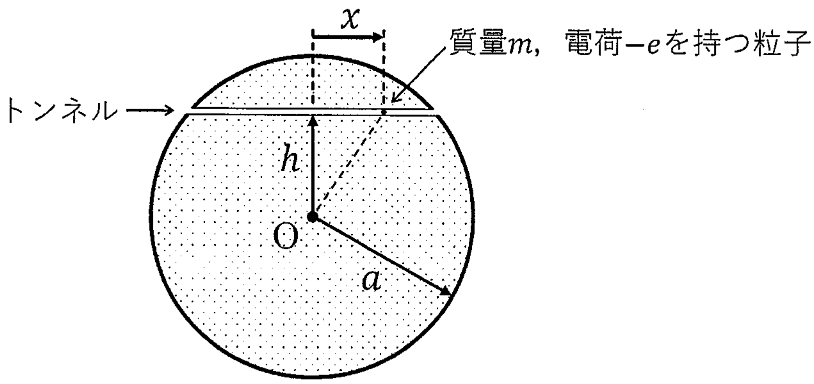
6) $x(t)$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

を具体的に書け。

7) 前問で導いたオイラー・ラグランジュ方程式の一般解を求めよ。

8) 粒子は，球体の外に飛び出さない限り，トンネルに沿って往復運動する。粒子の初期位置を $x=x_0$, 初速度を $\dot{x}=0$ として，周期（一往復に要する時間）T を求めよ。ただし，Q の代わりに ρ を使って答えを書け。



（物１の問題はここで終わり）

物2

虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ と書く。プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar = h/(2\pi)$ と書く。任意の演算子 $\hat{S}, \hat{T}$ の交換子（交換関係）を $[\hat{S}, \hat{T}] = \hat{S}\hat{T} - \hat{T}\hat{S}$ と書く。演算子 $\hat{S}$ のエルミート共役を $\hat{S}^\dagger$ と書く。恒等演算子を $\hat{1}$ と書く。位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ は正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}$ を満たす。以下の問に答えよ。

[1] 任意の演算子 $\hat{S}, \hat{S}', \hat{T}, \hat{T}'$ について

$$[\hat{S}, \hat{T}\hat{T}'] = [\hat{S}, \hat{T}]\hat{T}' + \hat{T}[\hat{S}, \hat{T}'] \quad \text{および} \quad [\hat{S}\hat{S}', \hat{T}] = \hat{S}[\hat{S}', \hat{T}] + [\hat{S}, \hat{T}]\hat{S}'$$

が成り立つことを示せ。

[2] Z と ω を正の実数として，演算子

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2Z\hbar}}(Z\hat{x} + i\hat{p}), \qquad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2Z\hbar}}(Z\hat{x} - i\hat{p})$$

を定める。$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]$ を求めよ（途中の計算も示せ）。

[3] $\hat{N} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ とおいて，

$$[\hat{N}, \hat{A}] \quad \text{および} \quad [\hat{N}, \hat{A}^\dagger]$$

を求めよ。

[4] ハミルトニアン

$$\hat{H}_1 = \frac{\omega}{2Z}(Z^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2)$$

を $\hat{x}, \hat{p}$ の代わりに $\hat{A}, \hat{A}^\dagger$ で書き表せ（途中の計算も示せ）。

[5] 非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ ごとにベクトル $|n\rangle$ を定め，非負整数 m, n に対して

$$\hat{A}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{A}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つとする。$\hat{A}^\dagger\hat{A}|n\rangle$ を求めよ（途中の計算も示せ）。

[6] 2つの粒子があるとし，各粒子に便宜的に1番，2番という番号を付ける．1番の粒子の位置と運動量の演算子を $\hat{x}_1, \hat{p}_1$，2番の粒子の位置と運動量の演算子を $\hat{x}_2, \hat{p}_2$ とし，正の実数 $Z_1, \omega_1, Z_2, \omega_2$ を用いて演算子

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2Z_1\hbar}}(Z_1\hat{x}_1 + i\hat{p}_1), \quad \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2Z_2\hbar}}(Z_2\hat{x}_2 + i\hat{p}_2), \quad \hat{N}_A = \hat{A}^\dagger\hat{A}, \quad \hat{N}_B = \hat{B}^\dagger\hat{B}$$

を定める。このときハミルトニアン

$$\hat{H}_2 = \hbar\omega_1\left(\hat{N}_A + \frac{1}{2}\hat{1}\right) + \hbar\omega_2\left(\hat{N}_B + \frac{1}{2}\hat{1}\right)$$

の固有値をすべて列挙せよ。

（物2の問題は次のページに続く）

[7] $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ である場合，$\hat{H}_2$ の固有値を小さいものから順に $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$ と並べたとき，任意の非負整数 k について E_k の縮重度（同じ固有値に属していて，直交する固有ベクトルの個数）を求めよ。

[8] $\omega_1 \neq \omega_2$ とし，正の実数 Δ を導入し，ハミルトニアン

$$\hat{H}_3 = \hbar\omega_1\big(\hat{N}_A + \frac{1}{2}\hat{1}\big) + \hbar\omega_2\big(\hat{N}_B + \frac{1}{2}\hat{1}\big) + \hbar\Delta\big(\hat{A}^\dagger\hat{B} + \hat{B}^\dagger\hat{A}\big)$$

を定めて，$\hat{N}_A + \hat{N}_B$ に対するハイゼンベルクの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\big(\hat{N}_A + \hat{N}_B\big) = \frac{1}{i\hbar}\Big[(\hat{N}_A + \hat{N}_B),\, \hat{H}_3\Big]$$

の右辺を計算せよ。

[9] 非負整数 $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $|n_1, n_2\rangle$ は $\hat{N}_A|n_1, n_2\rangle = n_1|n_1, n_2\rangle$ と $\hat{N}_B|n_1, n_2\rangle = n_2|n_1, n_2\rangle$ を満たす単位ベクトルとする。c_{n_1,n_2} を複素数として，状態ベクトル

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} c_{n_1,n_2}(t)\,|n_1, n_2\rangle$$

はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_3|\psi(t)\rangle$$

を満たすとする。$t = 0$ における係数が $c_{2,0}(0) = 1$ で，他の $c_{n_1,n_2}(0)$ はすべて 0 だとしたら，任意の時刻で $c_{2,0}$，$c_{1,1}$，$c_{0,2}$ 以外の $c_{n_1,n_2}(t)$ は恒等的に 0 であることを示せ。

[10] $\omega_1 \neq \omega_2$，$\Delta \neq 0$ として，ハミルトニアン

$$\hat{H}_4 = \hbar\omega_1\big(\hat{N}_A + \frac{1}{2}\hat{1}\big) + \hbar\omega_2\big(\hat{N}_B + \frac{1}{2}\hat{1}\big) + \hbar\Delta\big(\hat{A}^\dagger\hat{A}^\dagger\hat{B} + \hat{B}^\dagger\hat{A}\hat{A}\big)$$

を定め，

$$\Big[(\hat{N}_A + r\hat{N}_B),\, \hat{H}_4\Big]$$

が 0 になるような実数 r の値を求めよ。

（物２の問題はここで終わり）

物３

[1] 情報理論では ρ_r を状態 r の現れる確率として，情報エントロピー S_I を

$$S_I = -k \sum_{r=1}^{W} \rho_r \log \rho_r$$

として定義する。ただし，$k(>0)$ は任意定数，W は全状態数であり，$\sum_{r=1}^{W} \rho_r = 1$ と規格化されているものとする。

1）α をラグランジュの未定乗数とした

$$L = S_I - \alpha \left(\sum_{r=1}^{W} \rho_r - 1 \right)$$

を最大化する ρ_r を求めよ。

2）ρ_r の規格化条件を用いて ρ_r を W を使って表せ。等重率の原理は成り立っているか答えよ。

3）前問で求めた ρ_r を用いて，熱統計力学的なエントロピー S の式（ボルツマンの関係式）を導け。

4）等重率の原理が成り立っていない系の例として，偏りのあるコインを１個投げる場合を考える。表が出る確率を p，裏が出る確率を q として，情報エントロピー S_I^1 を k, p, q を用いて表わせ。ただし，$p + q = 1$ とする。

5）4) の偏ったコインを２つ投げる場合の情報エントロピー S_I^2 を計算し，S_I^1 を用いて表わせ。２つのコインは区別できるものとする。エントロピーの相加性が成り立っているか答えよ。

[2] 図１のような，DNA におけるポリヌクレオチドの結合と分離のモデルを考える。右端の N 番目のヌクレオチドは分離せず結合したままとし，ジッパーのように，あるヌクレオチドの左側が全て分離し，その右側は全て結合する。結合したヌクレオチドのエネルギーは０であり，分離したヌクレオチドのエネルギーは $\varepsilon(>0)$ とする。分離したヌクレオチドはそれぞれ $g(>1)$ 個の独立な状態が縮退しているとする。この系が絶対温度 T の平衡状態にあるとして，カノニカル分布の方法を用いて以下の問に答えよ。

(物３の問題は次のページに続く)

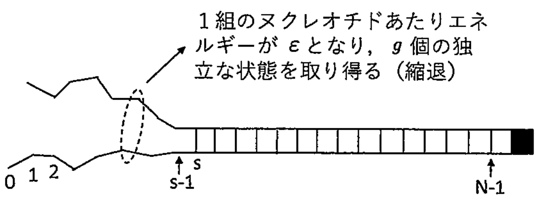


図1　左から s 個のヌクレオチドが分離したDNAのジッパーモデル

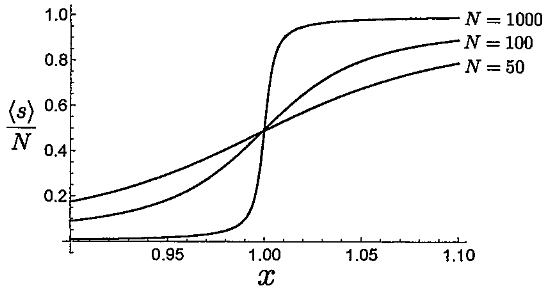


図2

1）図1のように s 個のヌクレオチドが分離した状態の系のエネルギーを書け。さらに，この系の分配関数 Z_N を $\varepsilon, \beta, g, s, N$ などを用いて書け。ただし，$\beta \equiv 1/(k_B T), k_B$ はそれぞれ逆温度，ボルツマン定数である。

2）Z_N を計算し，$x = g\exp(-\beta\varepsilon)$ と N を用いて表わせ。

3）s 個のヌクレオチドが分離した状態が現れる確率 $P(s)$ を Z_N, x, s を用いて書け。

4）分離したヌクレオチドの数の期待値 $\langle s \rangle = \sum_{s=0}^{N-1} sP(s)$ を計算し，x, N の関数として表わせ。

5）図2は $N = 50, 100, 1000$ の場合の $\langle s \rangle / N$ を x の関数としてグラフにしたものである。横軸を温度 T とした場合の $\langle s \rangle / N$ のグラフの概形を $N = 50, 100, 1000$ のそれぞれの場合について描け。

6）ヌクレオチドの総数 N が大きくなると，ある温度 T_c を境に状態が急激に変化する。このような現象を何というか答えよ。T_c を図2から読み取り，ε, k_B, g などを用いて表わせ。N が十分大きいとき，$T < T_c, T > T_c$ の温度で，それぞれどのような状態になっているか言葉で説明せよ。

(物３の問題はこれで終わり)

化１

以下の問[１]から[３]に答えよ。

[１] He 原子の波動関数について考える。ただし，規格化された 1s 空間軌道関数をϕ_{1s}，スピン関数をαおよびβとする。

1） 次の(ア)から(エ)の中から，He 原子の基底状態を表すスレイター行列式波動関数として最も適切なものを選べ。ただし，式中の(1)，(2)はそれぞれ電子 1，2 の座標を表すものとする。

(ア) $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \phi_{1s}(1)\alpha(1) & \phi_{1s}(1)\beta(1) \\ \phi_{1s}(2)\alpha(2) & \phi_{1s}(2)\beta(2) \end{vmatrix}$ (イ) $\Psi = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \phi_{1s}(1)\alpha(1) & \phi_{1s}(1)\beta(1) \\ \phi_{1s}(2)\alpha(2) & \phi_{1s}(2)\beta(2) \end{vmatrix}$

(ウ) $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \phi_{1s}(1)\alpha(1) & \phi_{1s}(2)\beta(2) \\ \phi_{1s}(1)\alpha(1) & \phi_{1s}(2)\beta(2) \end{vmatrix}$ (エ) $\Psi = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \phi_{1s}(1)\alpha(1) & \phi_{1s}(2)\beta(2) \\ \phi_{1s}(1)\alpha(1) & \phi_{1s}(2)\beta(2) \end{vmatrix}$

2） 1）で選んだ波動関数が電子の交換に対して反対称であることを示せ。

[２] 異核二原子分子 AB についてヒュッケル法を用いて考える。それぞれの原子の原子軌道をχ_{A}，χ_{B}とし，対応するクーロン積分をα_{A}，α_{B}，共鳴積分をβ，この分子の分子軌道を$\phi = C_{\mathrm{A}}\chi_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}\chi_{\mathrm{B}}$とする。ただし，$\alpha_{\mathrm{A}} \geq \alpha_{\mathrm{B}}$，$\beta < 0$とする。

1） 永年方程式を解き，軌道エネルギーを求めよ。

2） 1）で得られた２つの軌道エネルギーにそれぞれ対応する分子軌道の係数C_{A}，C_{B}の絶対値の大小関係およびC_{B}の符号を示せ。ただし，$C_A > 0$とする。

[３] 原子 A, B, C からなる三原子分子の分子軌道が，それぞれの原子上の原子軌道χ_{A}，χ_{B}，χ_{C}からなるものとする。この分子の分子軌道についてヒュッケル法を用いて考える。それぞれのクーロン積分はα_{A}，α_{B}，α_{C}で与えられ，$\alpha_{\mathrm{A}} > \alpha_{\mathrm{B}}$とする。また，共鳴積分は$\beta_{\mathrm{AC}}$，$\beta_{\mathrm{BC}}$で与えられ，$\beta_{\mathrm{AB}} = 0$とする。ただし，$\beta_{\mathrm{IJ}}$は軌道$\chi_{\mathrm{I}}$，$\chi_{\mathrm{J}}$からなる共鳴積分を表すものとする。

1） この分子の分子軌道を求めるための永年方程式を書け。ただし，軌道エネルギーをεとする。

2） この永年方程式を解いて得られる３つの軌道エネルギーε_1，ε_2，ε_3とα_{A}，α_{B}の大小関係は，$\varepsilon_3 > \alpha_{\mathrm{A}} > \varepsilon_2 > \alpha_{\mathrm{B}} > \varepsilon_1$となった。$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$および$\varepsilon_3$にそれぞれ対応する分子軌道が

$$\phi_1 = C_{1\mathrm{A}}\chi_{\mathrm{A}} + C_{1\mathrm{B}}\chi_{\mathrm{B}} + C_{1\mathrm{C}}\chi_{\mathrm{C}}$$
$$\phi_2 = C_{2\mathrm{A}}\chi_{\mathrm{A}} + C_{2\mathrm{B}}\chi_{\mathrm{B}} + C_{2\mathrm{C}}\chi_{\mathrm{C}}$$
$$\phi_3 = C_{3\mathrm{A}}\chi_{\mathrm{A}} + C_{3\mathrm{B}}\chi_{\mathrm{B}} + C_{3\mathrm{C}}\chi_{\mathrm{C}}$$

で表され，$C_{1\mathrm{A}} > 0$，$C_{1\mathrm{B}} > 0$，$C_{1\mathrm{C}} > 0$であった。このとき，分子軌道ϕ_2およびϕ_3に含まれる係数$C_{2\mathrm{A}}$，$C_{2\mathrm{B}}$，$C_{3\mathrm{A}}$，$C_{3\mathrm{B}}$の符号はどうなるか，理由とともに答えよ。ただし，$C_{2\mathrm{C}} > 0$，$C_{3\mathrm{C}} > 0$とする。

化２

次の文章を読んで，以下の問[１]から[４]に答えよ。

温度Tが一定のもとで，物質 A から E について，次のような反応を示す反応系がある。

$$\mathrm{A + D} \xrightarrow{k_1} \mathrm{B + E} \tag{1}$$

$$\mathrm{B + C} \xrightarrow{k_2} \mathrm{A + E} \tag{2}$$

ここで，k_1とk_2は反応速度定数を表す。このとき，反応(1)と(2)に $\boxed{\text{ア}}$ 状態理論を適用できるとすると，k_1 と k_2は,

$$k_1 = \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\frac{z_1^{\neq}}{z_\mathrm{A}z_\mathrm{D}}\exp\left(\frac{-E_1}{k_\mathrm{B}T}\right) = \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\exp\left(\frac{-\Delta G_1^{\neq}}{RT}\right) \tag{3}$$

$$k_2 = \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\frac{z_2^{\neq}}{z_\mathrm{B}z_\mathrm{C}}\exp\left(\frac{-E_2}{k_\mathrm{B}T}\right) = \frac{k_\mathrm{B}T}{h}\exp\left(\frac{-\Delta G_2^{\neq}}{RT}\right) \tag{4}$$

と表される。ただし，k_Bはボルツマン定数，hはプランク定数，z_Aとz_Bなどはそれぞれ A と B の単位体積あたりの分配関数，Rは気体定数である。

反応式(1)と(2)において，物質 A から E の反応速度は,

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = -k_1[\mathrm{A}][\mathrm{D}] + k_2[\mathrm{B}][\mathrm{C}] \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{B}]}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{A}][\mathrm{D}] - k_2[\mathrm{B}][\mathrm{C}] \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{C}]}{\mathrm{d}t} = -k_2[\mathrm{B}][\mathrm{C}] \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{D}]}{\mathrm{d}t} = -k_1[\mathrm{A}][\mathrm{D}] \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{E}]}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{A}][\mathrm{D}] + k_2[\mathrm{B}][\mathrm{C}] \tag{9}$$

と表すことができる。

時刻 0 で，初期濃度$[\mathrm{A}]_0$= a mol/L，$[\mathrm{B}]_0$= 0 mol/L，$[\mathrm{C}]_0$=$[\mathrm{D}]_0$= c mol/L として，実験を行ったところ，濃度[A]と[B]が，時間に対して，図１のように変化して，それぞれ一定値$[\mathrm{A}]_\mathrm{ss}$と$[\mathrm{B}]_\mathrm{ss}$となった。このとき，[A]と[B]は $\boxed{\text{イ}}$ 状態にあると言ってよい。$\boxed{\text{イ}}$ 状態では，速度式(5)と(6)とは，それぞれ

（化２の問題は次のページに続く）

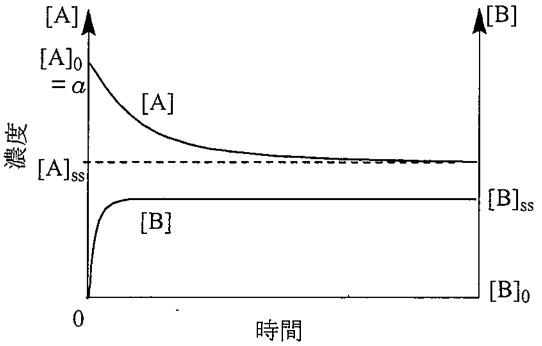


図１

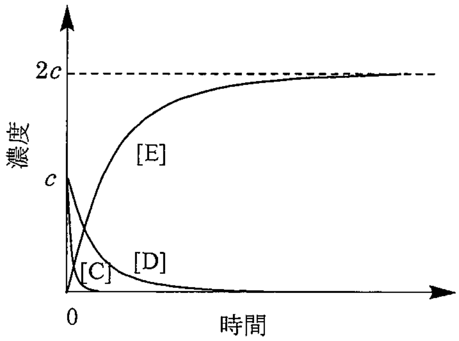


図２

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = -k_1[\mathrm{A}]_{\mathrm{ss}}[\mathrm{D}] + k_2[\mathrm{B}]_{\mathrm{ss}}[\mathrm{C}] = \boxed{\text{あ}} \qquad (10)$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{B}]}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{A}]_{\mathrm{ss}}[\mathrm{D}] - k_2[\mathrm{B}]_{\mathrm{ss}}[\mathrm{C}] = \boxed{\text{あ}} \qquad (11)$$

と表すことができる。また，[A]と[B]が[C]や[D]より十分小さい反応初期では，

$$[\mathrm{A}]_{\mathrm{ss}} + [\mathrm{B}]_{\mathrm{ss}} = [\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 = \boxed{\text{い}} \qquad (12)$$

であることを用いると，

$$[\mathrm{A}]_{\mathrm{ss}} = \boxed{\text{う}} \cdot a, \qquad [\mathrm{B}]_{\mathrm{ss}} = \boxed{\text{え}} \cdot a \qquad (13)$$

と表すことができる。こうして，物質 E の濃度[E]は $\boxed{\text{イ}}$ 状態近似が成り立つ時間領域で，

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{E}]}{\mathrm{d}t} = \boxed{\text{お}} \qquad (14)$$

と表すことができるので，濃度[E]は，時間の増加に $\boxed{\text{ウ}}$ 比例して $\boxed{\text{エ}}$ する（図２）。

[１] $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に適切な語句を入れよ。

[２] $\boxed{\text{あ}}$ に適切な数値を入れよ。

[３] $\boxed{\text{い}}$ から $\boxed{\text{お}}$ に適切な数式を入れよ。

[４] 1) 反応(1)について，$z_1^{\neq}$，E_1，および$\Delta G_1^{\neq}$はそれぞれ何を表しているか，それぞれ 20 字以下で説明せよ。もし必要ならば，[１]で答えた $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に入る語句を用いてよい。

2) $\Delta G_1^{\neq} = \Delta H_1^{\neq} - T\Delta S_1^{\neq}$ と書くと $\Delta S_1^{\neq} < 0$ となった。その理由を 40 字程度で説明せよ。ただし，記号ΔHとΔSは，それぞれエンタルピー変化とエントロピー変化を表す。必要ならば，[１]で答えた $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に入る語句を用いてよい。

（化２の問題はここで終わり）

化３

以下の問[１]から[４]に答えよ。

[１] 以下に示した化合物の考えられるすべての共鳴構造式を書き，構造の変化に伴う電子移動を，図１にならって矢印を用いて示しなさい。電荷を持つ原子がある場合は，それを明記すること。

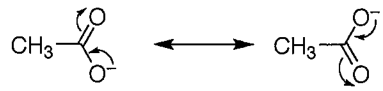


図１

1） オゾン　O_3
2） *N*,*N*-ジメチルホルムアミド　$(CH_3)_2NCHO$
3） ニトロベンゼン　$C_6H_5NO_2$

[２] 次の３種類のカルボン酸を酸性の強い順に並べ，その理由を述べなさい。

CH_3CO_2H　　　CF_3CO_2H　　　CCl_3CO_2H

[３] 1,2-ジフェニルエチレンジアミンは，下記の示性式を持つ。1,2-ジフェニルエチレンジアミンのすべての立体異性体の構造を書きなさい。また，それぞれの立体異性体について，キラルかアキラルかを明記しなさい。

$H_2NCH(C_6H_5)CH(C_6H_5)NH_2$

[４] D-アラニンとL-アラニンの1:1混合物を図２のように光学分割した。まず，この混合物を無水酢酸と酢酸によりアセチル化した。ついで，酵素によってアセチル基を脱保護することで，*N*-アセチル-D-アラニンとL-アラニンをそれぞれ得た。以下の問に答えなさい。

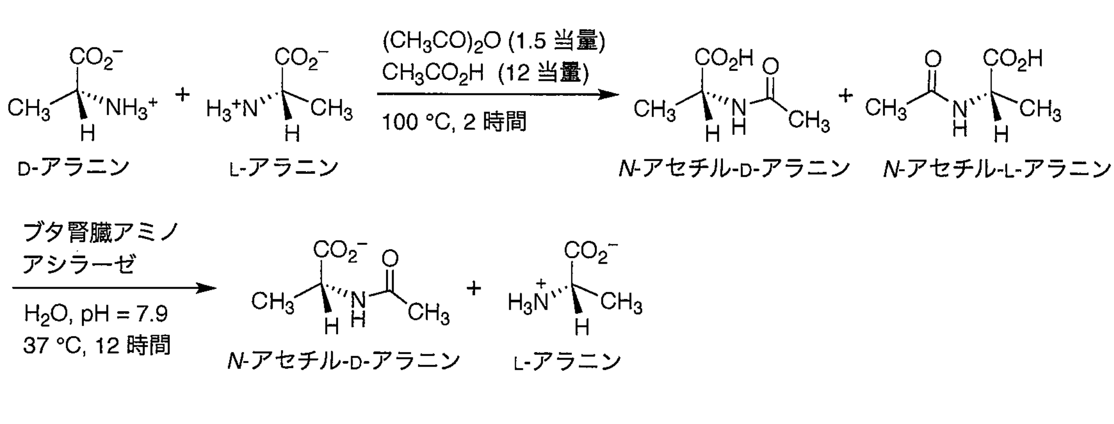


図２

（化３の問題は次のページに続く）

（化３の問題の続き）

1）　L-アラニンの絶対配置は，*R* 配置か *S* 配置のどちらであるか答えなさい。

2）　出発物質を D-アラニンのみとして，電子の流れを示す矢印を用いることでアセチル化の反応機構を書きなさい。

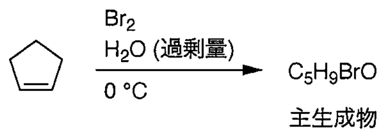
3）　今回の実験のように，光学分割して得られたアラニンの絶対配置を，実験的に確認するには何をすればよいか説明しなさい。ただし，D-アラニンと L-アラニンは既知化合物であり，この実験で比較が必要なデータは入手可能であるとする。

（化３の問題はここで終わり）

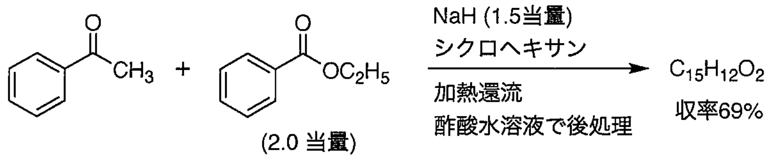
化4

以下に記載の反応式1）から5）において，主生成物とそれを与える反応機構について説明しなさい。反応機構を解答する際には，電子の流れを示す矢印を用いること。

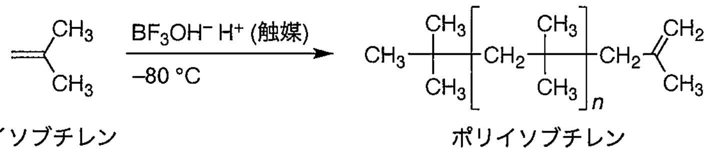
1）



2）

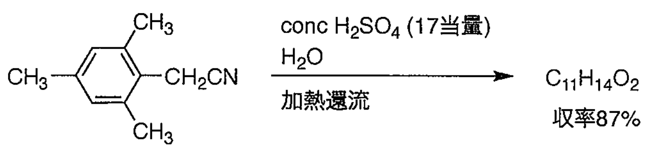


3）

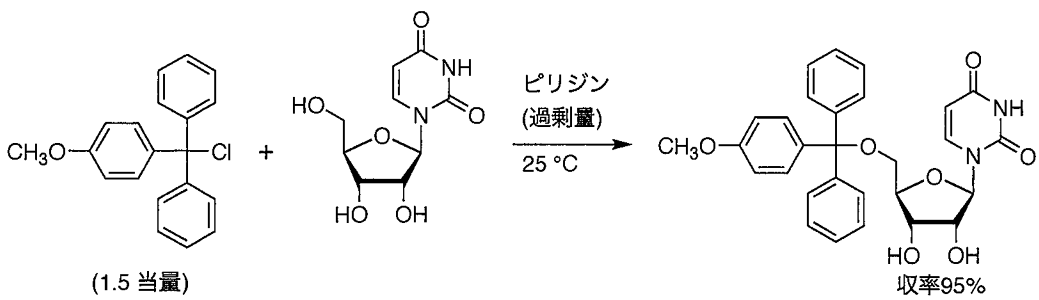


n は任意の自然数とし，ポリイソブチレンの末端構造は上記に限定した。

4）



5）



生１

次の文を読み，各問に答えよ。

タンパク質をコードする mRNA 以外の RNA も，翻訳において重要な役割を果たす。（ア）は（イ）塩基ほどの小さな RNA 分子で，mRNA 上の（ウ）と相補的な配列の（エ）を持つため mRNA と結合でき，また一方で（オ）と共有結合することができる。このため，（ア）は（ウ）と（オ）のアダプターとして機能する。（ウ）と（オ）を正確に対応づけるためには（カ）合成酵素が重要である。この酵素は，特定の（ア）の（エ）と（キ）末端の配列を認識し，(A) その（ア）の（キ）末端に適切な（オ）を結合させ，（カ）を合成する。なお，（ウ）と（オ）の対応は一対一ではなく，タンパク質の素材となる（ク）種類の（オ）のほとんどは複数の（ウ）によって規定されている。（オ）をコードしない（ウ）として３つの（ケ）があり，（オ）の（コ）をコードする（ウ）である（サ）とともに，mRNA 上でタンパク質をコードする範囲を決める役割を持つ。

（シ）は（ス）とともにリボソームを構成する RNA で，翻訳の足場となる。翻訳の伸長反応においては，適切な（カ）がリボソームの（セ）部位に入り込むと，（エ）と（ウ）の間の塩基対形成により，リボソームの（ソ）サブユニットに配置された mRNA と結合する。すると，（タ）部位に結合していた（チ）が持つポリペプチドが（ア）から外れ，（シ）の触媒作用により，(B) （セ）部位の（カ）が持つ（オ）と（ツ）結合をつくる。つぎに，リボソームが mRNA の（キ）末端の方向に（テ）塩基分ずれると，（タ）部位の（ア）は（ト）部位に移って放出され，（セ）部位で新たにつくられた（チ）は（タ）部位に移動する。これらの過程が繰り返されてポリペプチドは伸長していく。

近年，遺伝子発現の制御に関わる多くの RNA がみつかり，(C) 調節 RNA とよばれ，研究が進んでいる。また，RNA は複製の開始においても重要であり，(D) DNA ポリメラーゼは必ず，鋳型 DNA と結合した短い RNA 鎖の 3'末端から合成反応を始める。

［1］文中の（ア）～（ト）に次の語群から適切な語を選んで入れよ。

［5', 3', tRNA, rRNA, sRNA, 3, 20, 80, 300, コドン，アンチコドン，開始コドン，終止コドン，大，小，リボソーム DNA，リボソームタンパク質，リボソーム脂質，アミノアシル tRNA，ペプチジル tRNA，メチオニン，プロリン，アミノ酸，カルボン酸，ペプチド，ホスホジエステル，A, E, P, S］

［2］下線（A）と下線（B）の結合反応には，何によって得られるエネルギーが用いられるか，それぞれの反応について３０～５０字程度で述べよ。

［3］下線（C）の一例を挙げ，遺伝子発現制御の仕組みを１００～２００字程度で説明せよ。

［4］下線（D）の特徴のため，真核生物においては，テロメラーゼの働きがないと複製が行われるたびに染色体の末端の情報がすこしずつ消失してしまう。これについて，

下記の問に答えよ。図を用いてもよい。

1）この理由を，次の語群の語をできるだけ多く用いて１００～１５０字程度で説明せよ。

［ラギング鎖，3'末端，RNA プライマー，岡崎フラグメント，DNA 合成］

2）この消失を防ぐための仕組みを，次の語群の語をできるだけ多く用いて１５０～２００字程度で説明せよ。

［ラギング鎖，3'末端，RNA プライマー，DNA 合成，テロメア，テロメラーゼ］

生２

以下の（a）～（d）の実験方法から２つを選び，それぞれについて各問に答えよ。必要に応じて図を用いてもよい。

（a）定量的逆転写 PCR 法
（b）二分子蛍光補完法
（c）クロマチン免疫沈降法
（d）SDS ポリアクリルアミドゲル電気泳動法

［１］実験の目的を２０～４０字程度で説明せよ。

［２］実験の原理を２００～３００字程度で説明せよ。

［３］実験の手順を３００～４００字程度で説明せよ。

生３

［1］細胞内小器官の１つであるリソソームに関する次の問に答えよ。

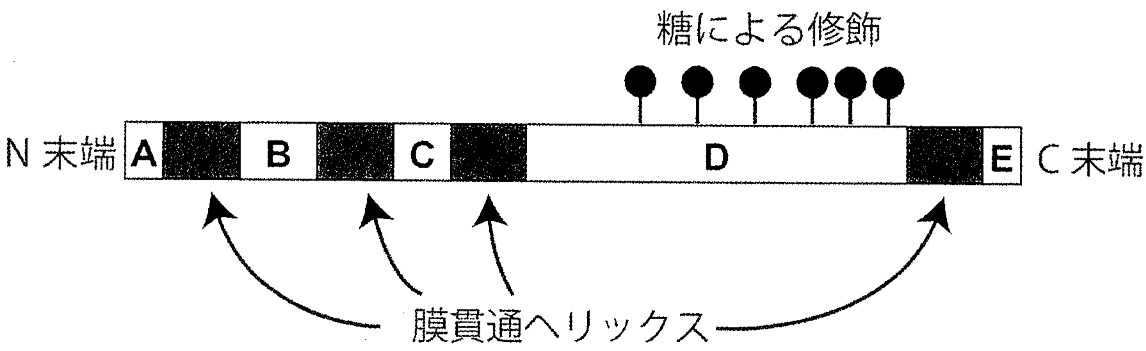
１）リソソームは不要になったタンパク質，核酸，糖鎖などをその内部に取り込み分解する。リソソームの内部でこれらの不要物を分解する酵素として適切なものを下記の語群の中からできるだけ多く選べ。また，選んだ酵素の働きについて簡潔に説明せよ。
語群：プロテアーゼ，トポイソメラーゼ，アクチン，ヌクレアーゼ，ポリメラーゼ，グリコシルトランスフェラーゼ，ホスファターゼ，リガーゼ

２）リソソームの内部で働く酵素は酸性環境下で高い活性を示すが，この利点を推測し 100 字程度で説明せよ。

３）リソソームの内部を酸性に保つための仕組みを下記の語群の中から適切なものを用いて 100 字程度で説明せよ。
語群：プロトンチャネル，GTP，濃度勾配，ATP，細胞質，プロトンポンプ，ゴルジ体，水酸化物イオン

４）不要物を分解するには，不要物をリソソームへと輸送する必要がある。輸送経路に関する次の文章を読んで空欄を埋めよ。
細胞外にある物質は（ア）によって細胞内に取り込まれ，（イ）を経て，リソソームへと送られる。また，細胞内の不要なタンパク質は（ウ）と呼ばれる小胞にくるまれる。この小胞がリソソームと融合することで，不要なタンパク質は分解される。この働きのことを（エ）という。

［2］リソソームの膜上で働くあるタンパク質のＮ末端からＣ末端までを下のような帯図で模式的に表した。このタンパク質は膜貫通ヘリックスにより，リソソームの内部に露出する部分とリソソームの外部に露出する部分に分けられる。このタンパク質のＡ～Ｅの各部分がリソソームの内外のどちらに露出するかを推測せよ。また，推測した理由も述べよ。



地１

以下に地球科学に関する類似の用語の組み合わせが４組ある。それぞれの用語について，違いが分かるように関連事項も含めて説明せよ。説明はそれぞれの組み合わせについて200～400字程度とすること。

［１］ 地殻とプレート
［２］ 外観色と条痕色
［３］ 示準化石と示相化石
［４］ Ｐ波とＳ波

地２

以下に地理学（測地学）に関する類似の用語の組み合わせが 4 組ある。それぞれの用語について，違いが分かるように関連事項も含めて説明せよ。説明はそれぞれの組み合わせについて 200～400 字程度とすること。

［１］ 街区方式住所と道路方式住所
［２］ ベクターマップとラスターマップ
［３］ 日本測地系と世界測地系
［４］ 自律測位と他律測位

情1

以下のＣ言語の問に答えよ。

[1] 次のプログラム実行時の標準出力への表示結果を示せ。

```
#include <stdio.h>
int main(void){
        int x1 = 0xacac, x2 = 1010;
        printf(" %4x %d %d %x \n", x2, x1+x2, x1|x2, x1>>3);
        return 0;
}
```

[2] 行列の積を求めるプログラムを作成した。下線部を適切に埋めよ。

```
#include <stdio.h>
int f(____(1)____){
        int i,k,l;
        for(k=0; k<n; k++)
                for(l=0; l<n; l++){
                        ____(2)____;
                        for(i=0; i<m; i++) c[k][l] ____(3)____;
                }
        return 0;
}
int main(void){
        int a[2][3]={{1,2,3},{7,8,9}},
            b[3][2]={{1,-1},{10,-10},{100,-100}}, c[2][2],
            i, j, n=2, m=3;
        f(a,b,c,m,n);
        for(i=0; i<n; i++)
                for(j=0; j<n; j++)
                        printf("%d\n",c[i][j]);
        return 0;
}
```

標準出力結果例：

```
321
-321
987
-987
```

[3] 配列の要素の最大値を出力するプログラムを再帰的プログラミングを用いて作成した。下線部を適切に埋めよ。

```
#include <stdio.h>
int f(int a[], int n, int max){
        if( n < 0 ){
                return ____(1)____;
        }else if( a[n] > max ){
                return f(____(2)____);
        }else{
                return f(____(3)____);
        }
}
int main(void){
        int a[]={-5,0,10,2,-3,5,-1,3,-20,1}, n=10;
        printf("%d\n",f(a, n-2, a[n-1]));
        return 0;
}
```

標準出力結果例：

```
10
```

情２

［１］表１は，２名のプレイヤーが戦略 A または B を同時に出したときにそれぞれが得られる利得を表す。この状況は「鹿狩り」ゲームと呼ばれ，一方の戦略は利得の大きい鹿を共同して狩ることを目指す行動を，他方は利得は小さいが単独で捕獲できる兎を狩る行動に相当する。A, B それぞれどちらの行動に相当するか示した上で，行動選択の際に生じるジレンマについて簡潔に述べなさい。また，このようなジレンマ的状況の実社会における具体例を一つ挙げて説明しなさい。

［２］$W\times W$ の格子状のセル空間を考え，上端と下端，右端と左端のセルが隣接するトーラス状であるとする。各セルは表１の A と B のいずれかの戦略を取るものとする。現時刻での各セルの戦略を用いて，各セルの次の時刻の戦略を次の手順で決定する。

手順①：上下左右斜めの８近傍のセルの各戦略と自身のセルの戦略を用いて表１のゲームを行った際に自身が得る利得の合計を記録する。

手順②：次に，上下左右斜めの８近傍のセルの中で，最も高い合計利得を持つセルの利得が自身の合計利得より大きい場合，その現ステップでの戦略を自身の次の時刻での戦略とする。ただし，最も高い合計利得を持つセルが複数ある場合はその中からランダムに１つを選ぶものとする。

次の問に答えなさい．

１） 図１は $W=7$ の場合のセルの戦略の分布（戦略 A：白，戦略 B：黒）の例を示している。次の時刻と，その次の時刻の戦略の分布をそれぞれ図示しなさい。

２） $W=15$ とし，各セルが戦略 B をとる確率を 0.25 として初期の戦略分布を決めて実験したところ，戦略 B のセル全体での割合が図２の実線(i)のように推移した。戦略の変化の過程をセル上の戦略の分布に注目して説明しなさい。

３） ２）と同じ初期分布を採用し，手順②において，近傍の定義を「上下左右の４近傍」に変更して実験したところ，戦略 B の割合の推移は図２の破線(ii)のようになった。この時，戦略の変化の過程とその仕組みをセル上の戦略の分布に注目して説明しなさい。

表１

自分＼相手	戦略A	戦略B
戦略A	(1, 1)	(1, 0)
戦略B	(0, 1)	(2, 2)

（自分の利得，相手の利得）

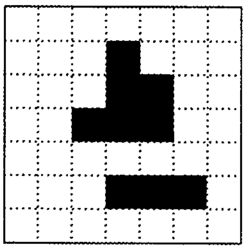


図１

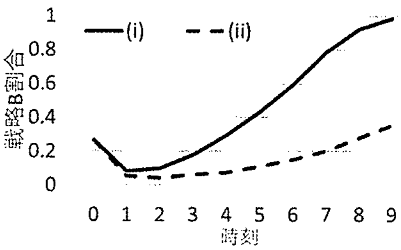
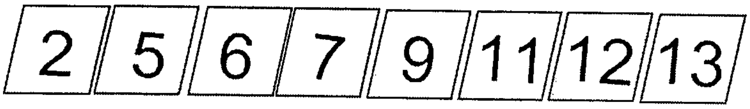


図２

情３

下図のように，カードの表に２，５，６，７，９，１１，１２，１３のうちどれかの数字が１つ書かれたカードがあるとする。

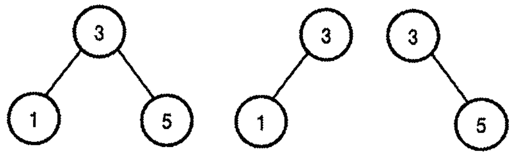


[1] カードを裏返し十分にシャッフルして並べ替え，カードを裏返したまま，以下の図のように積み上げる。これを以下では“山”とよぶ。

1） 山の上から１枚ずつカードをめくる。１１と書かれたカードをひくまでの枚数の期待値を理由とともに示しなさい。

2） 山の上からカードを１枚ずつめくっていくと，１枚目から８枚目のカードに書かれた数字はそれぞれ，１１，７，１３，５，９，６，２，１２であった。この順に値を空の二分探索木に挿入した場合に得られる二分探索木を，途中経過とともに示しなさい。

なお，データ構造のひとつである木構造のうち，どのノードも２つ以下の子ノードをもつ木構造は二分木とよばれる。二分木のなかでも各ノードの値が，左の子ノードの値よりも大きく，右の子ノードの値よりも小さい場合は二分探索木とよばれる（左の子ノードの値<親ノードの値<右の子ノードの値）。二分探索木の例を以下に示す。



3） ２）で作成した二分探索木を通りがけ順（中間順／in-order）で走査する場合，訪問するノードの値を最初から順に示しなさい。なお，通りがけ順とは，まず左部分木を走査，次に節点，次に右部分木を再帰的に走査する方法である。

4） ３）で得た値の順に空の二分探索木に挿入して得られる二分探索木を，示しなさい。

5） ノード数がNの二分探索木に，任意の値yをもつノードが存在するかを探索する場合を考える。探索に要する最悪と最良の時間計算量を示し，それぞれの理由を二分探索木の構造に対応させて説明せよ。

工1

[1] 0.028 kg の C_2H_4（0.028 kg/mol）を 300 K の一定温度で 1 m^3 から 0.1 m^3 まで圧縮したい。

1）理想気体に従う場合の体積変化における最小仕事を求めよ。

2）van der Waals 状態方程式に従う場合の体積変化における最小仕事を求めよ。なお，van der Waals 定数は $a = 4 \times 10^6\ cm^6 \cdot atm$, $b = 50\ cm^3$ とする。ここで，$\ln(x) = 2.3 \log(x)$としてよい。

3）壁と気体の間に働く引力は測定される圧力に影響を及ぼさない理由を示せ。

[2] 気体が一定体積V_2の下でP_2からP_1へ圧力変化し，（P_1, V_2）から（P_2, V_1）まで断熱膨張し，一定圧力P_2の下でV_1からV_2へと体積変化するような理想気体によって動作する熱機関がある。

1）PV線図上にサイクルを示せ。

2）熱効率が次式となることを示せ。ただし，$\gamma = C_P/C_V$として，C_Vは定容熱容量，C_Pは定圧熱容量であり，熱容量は温度に依存しないと仮定する。

$$\varepsilon = 1 - \gamma \frac{(V_1/V_2) - 1}{(P_1/P_2) - 1}$$

工2

[1] 図1のように，円筒容器（半径 R）が内部の水とともに鉛直軸周りに一定の角速度 ω で回転し，水が容器に対して静止状態にあるものとする。円筒容器の底面中心を座標原点とし，半径方向に r 軸，鉛直上方向に z 軸をとり，重力加速度を g とする。以下の問に答えなさい。

1) 半径 r の位置における水面の高さ z を求めなさい。ただし，容器中心（$r = 0$）における水面高さを z_0 とする。

2) ω の値にかかわらず，水面高さが一定の半径位置 r_1 がある。r_1 を求めなさい。

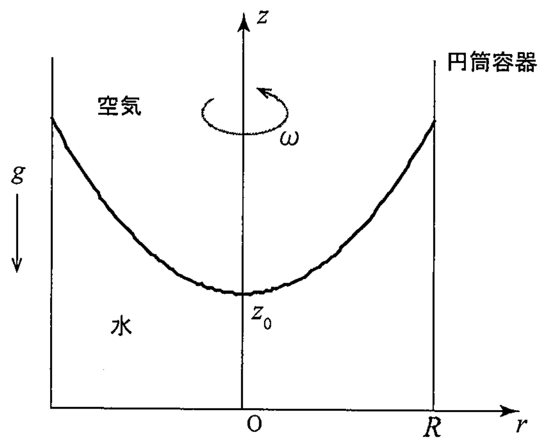


図1

[2] 二次元空間（x - y 平面）における非圧縮渦なし流れについて，以下の問に答えなさい。ただし，x および y 方向の速度成分をそれぞれ u および v とする。

1) 速度ポテンシャル ϕ と速度成分の関係を示しなさい。

2) 流れ関数 φ と速度成分の関係を示しなさい。

3) ϕ = 一定の線と φ = 一定の線は直交することを示しなさい。

工3

時間関数$f(t)$をラプラス変換した関数を$F(s)$のように書くことにする。

[1] 図1に示す直流サーボモータについて，以下の問に答えよ。なお，$v_{\mathrm{i}}(t)$は入力電圧，$i(t)$は電気回路を流れる電流，$v_{\mathrm{m}}(t)$はモータの逆起電力，$\tau(t)$はモータの発生トルク，$\theta(t)$は出力のモータ回転角度，Rは抵抗値，Lはコイルのインダクタンス，k_{E}とk_{T}はモータの逆起電力定数とトルク定数，JとDはモータの回転子と負荷を合わせた系の慣性モーメントと粘性摩擦係数である。

1）電気系の電圧と電流の関係を表す微分方程式を示せ。

2）機械系の回転運動を表す微分方程式を示せ。

3）入力$V_{\mathrm{i}}(s)$から出力$\Theta(s)$までの伝達関数$\frac{\Theta(s)}{V_{\mathrm{i}}(s)}$を求めよ。ただし，$v_{\mathrm{m}}(t)=k_{\mathrm{E}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，$\tau(t)=k_{\mathrm{T}}i$，および初期値をすべてゼロとする。

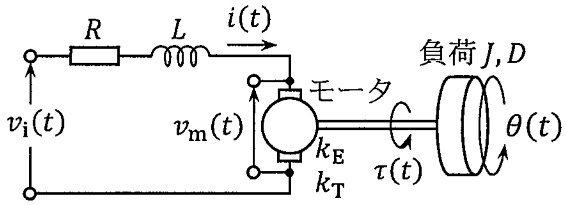


図1

[2] 図2に示す制御系について，以下の問に答えよ。

1）$C(s)$の折れ線近似ゲイン特性を描け。図中に折れ線の傾き，折点周波数，および角周波数$\omega=1\ \mathrm{rad/s}$のときのゲインの値を明記せよ。

2）$C(s)$の折れ線近似ゲイン特性が0 dBと交差するゲインクロスオーバー周波数を求めよ。

3）入力$U(s)$と外乱$D(s)$のそれぞれから偏差$E(s)$までの伝達関数$\frac{E(s)}{U(s)}$と$\frac{E(s)}{D(s)}$を求めよ。

4）ラウスの安定判別法を用いて，系の安定性を判別せよ。

5）$u(t)=t^2$および$d(t)=\sin t$のとき，定常偏差の最大値を求めよ。

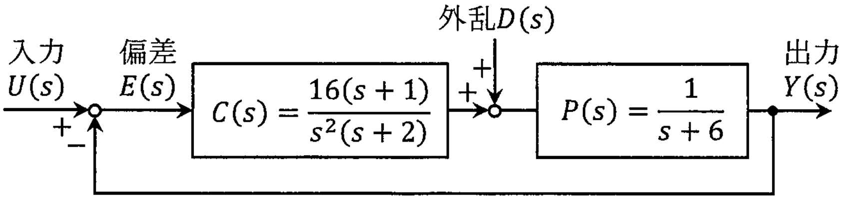


図2